無線通信システムにおける線形代数

Linear Algebra in Wireless Communication Systems

菊間 信良
Nobuyoshi KIKUMA

名古屋工業大学
Nagoya Institute of Technology

概要

高等数学の基礎として線形代数は広く学ばれている．本基礎講座では，大学等で習う線形代数がアンテナおよび無線システムでどのように利用されているかを，マルチアンテナを用いた MIMO 通信やセンシング技術の例を交えながら解説する．本講座の目的は，聴講者が線形代数と物理が有機的につながることを実感すること，および，線形代数をアンテナおよび無線システムの解析のツールとして十分に理解し使いこなせるようになる，すなわち「線形代数力」を向上させることである．

図 MIMO 通信において必要とされる線形代数力

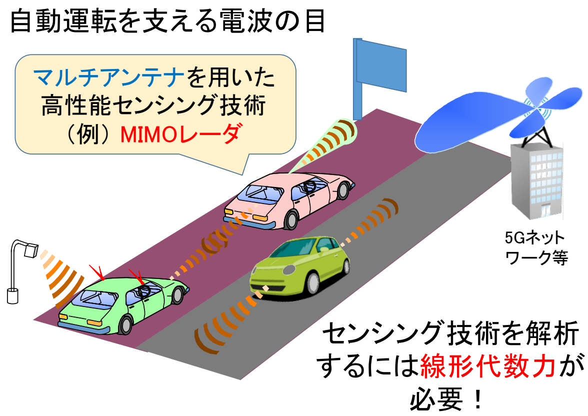

図 センシング技術において必要とされる線形代数力

Abstract

Linear algebra is widely learned as the basis of high-level mathematics. This introductory lecture explains with some examples how linear algebra is used in antennas and wireless systems such as MIMO communications and sensing technologies with multiple antennas. The primary purpose of this lecture is that the audience learns to connect linear algebra with physics organically. In addition, it is expected that the audience will understand and manipulate linear algebra as an effective tool for the analysis of antennas and wireless systems.

1. はじめに

5G（第 5 世代）および Beyond 5G の移動通信システムでは，通信の高速大容量化，多接続化のため，送受でマルチアンテナシステムを用いることが必須である [1]–[4]．また，自動運転車と先進運転支援システム (ADAS: Advanced Driver Assistance System) の根幹として，マルチアンテナを用いた高性能な電波センシング技術が期待されている [5], [6]．本基礎講座では，マルチアンテナシステムの最適化（アレー信号処理）および特性解析に必要な複素数をベースとする線形代数とその応用について解説をする [7]–[13]．主に，アダプティブアレー，電波の到来方向 (DOA: Direction of Arrival) 推定 [5], [6]，さらに MIMO (Multiple Input and Multiple Output) [1]–[4] における多変数制御問題に焦点をあて，行列の固有値・固有ベクトル，特異値・特異ベクトルが，アンテナシステムの最適化において効果的で重要な役割を果たすことを示す．そして，応用例を通して，線形代数を理解し活用できることは，今後の無線システムにおける大規模なアレー信号処理技術の研究開発において，確実に下支えする力となることを説明する．

2. 行列とベクトルの定義

$\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ をそれぞれ実数集合と複素数集合とする．一般に複素数を以下のように長方形に複数個配列したものを行列（マトリクス）という．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M\times N} \quad a_{mn} \in \mathbb{C} \tag{1}$$

$$(m = 1, \cdots, M; n = 1, \cdots, N)$$

なお，$\mathbb{C}^{M\times N}$ は複素数を要素にもつ $M \times N$ の行列の集合を表す．特に，$N = 1$ の場合は $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^{M\times 1}$ となり，M 次元の列（縦）ベクトルとなる．同様に，$M = 1$ の場合は $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^{1\times N}$ となり，N 次元の行（横）ベクトルとなる．通常，$\mathbb{C}^{M\times 1}$ は $\mathbb{C}^{M}$ と略して表される．

3. なぜ複素数を用いた線形代数が必要なのか

3.1 信号伝送の入出力関係

高等数学の基礎として広く学ばれている線形代数は実数をもとにしたものがほとんどである．一方，無線システムでは信号など複素数表現することが多い．それ故に，複素数をベースとした線形代数を学ぶことは，無線システムを解析する上で非常に重要となる．図 1 は，信号伝送の入出力表現で，なぜ複素数を用いる必要があるのかを説明するものである．図 1 が示すように，複素表現を

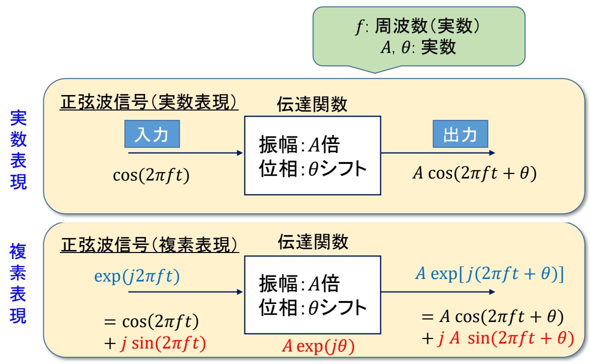

図 1　複素数を用いた信号伝送の入出力表現

用いると，周波数 f の正弦波信号に対する出力信号は

$$A \exp[j(2\pi f t + \theta)] = A \exp(j\theta) \exp(j2\pi f t)$$

と表され，入出力関係が複素数 $A \exp(j\theta)$ を乗算するという代数演算で表現できることが分かる．これが複素数を用いる利点の一つである．なお，広帯域信号の場合は，フーリエ級数展開の考えを用い，上記の式を複数の周波数成分で重ね合せすることによって，同様に表現できることが理解できるであろう．

3.2 アレーアンテナ

アレーアンテナを例に，なぜ複素数を用いた線形代数が必要なのかを説明する．図 2 は，受信用の K 素子アレーアンテナのブロック図である．複素数で表した各アンテナ素子の受信信号を $x_1(t), \cdots, x_K(t)$，受信信号の振幅と位相を調整する複素ウエイトを $w_1, \cdots, w_K$ と表すと，アレー

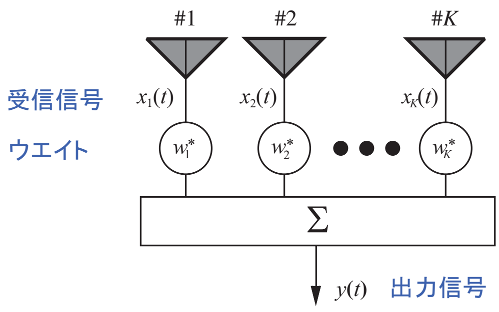

図 2　K 素子アレーアンテナ（受信用）

アンテナの出力信号 $y(t)$ は次式で表される．

$$\begin{aligned} y(t) &= w_1^* x_1(t) + \cdots + w_K^* x_K(t) \\ &= \sum_{k=1}^{K} w_k^* x_k(t) \\ &= \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^T(t) \boldsymbol{w}^* \end{aligned} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_K(t)]^T \tag{3}$$

$$\boldsymbol{w} = [w_1(t) \ \cdots \ w_K]^T \tag{4}$$

ただし，上添字の $*$，T，および H は複素共役，転置，および複素共役転置を表す．上式において，$\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{w}$ はそれぞれ受信ベクトルとウエイトベクトルと呼ばれ，出力信号 $y(t)$ は両ベクトルの複素内積（以後，単に内積と呼ぶ）で表現される．アレーアンテナの出力信号は，通常，ウエイトベクトルによって制御されることになるが，内積の性質を利用すれば，アレー出力の制御を比較的容易に行うことができる．

さらに，アレーアンテナの出力電力 P_{out} は，期待値演算 $E[\cdot]$ を用いて，

$$P_{\mathrm{out}} = E[|y(t)|^2] = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_{xx} \boldsymbol{w} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{R}_{xx} = E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^H(t)] \ \text{（相関行列）} \tag{6}$$

で与えられ，相関行列 $\boldsymbol{R}_{xx}$ に関するウエイトベクトル $\boldsymbol{w}$ の二次形式で表される [7]．これは，二次形式の性質を利用して，アレーアンテナの出力電力の最大化や最小化を行うことができることを示しており，後述するように，相関行列 $\boldsymbol{R}_{xx}$ の固有構造に大きく依存することとなる．

このようにして，線形代数を利用して多変数を行列表現することにより，アレーアンテナの性質が理解しやすくなり，受信信号の振幅と位相を調整するアレーアンテナのウエイト制御も容易となる．

3.3　MIMO システム

図 3 は，MIMO (Multiple Input and Multiple Output) と呼ばれる空間多重技術を用いた信号伝送システムであり，無線 LAN や第 4 世代移動通信 (4G)，第 5 世代移動通信 (5G) において実用化されている [1]–[4]．図 3 では，送信側 M 素子，受信側 N 素子のマルチアンテナで構成され，h_{nm} は，第 m 送信アンテナと第 n 受信アンテナとの間のチャネル応答値を表している．

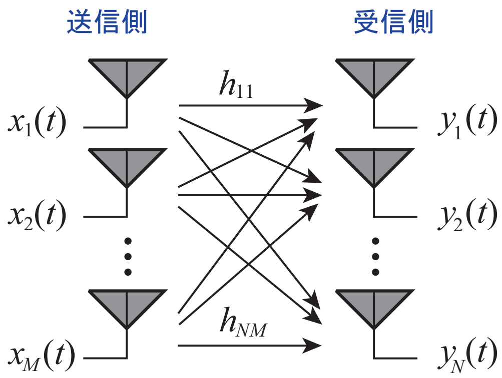

図 3　MIMO システム（送信 M 素子，受信 N 素子）

この場合，M 次元送信信号ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$，N 次元受信信号ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$，および $N \times M$ のチャネル応答行列 $\boldsymbol{H}$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_M(t)]^T \tag{7}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t) \ \cdots \ y_N(t)]^T \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{NM} \end{bmatrix} \tag{9}$$

と定義すると，受信信号ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ は

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t) \tag{10}$$

と表される．このように行列表現することにより，入出力関係が明確となり，チャネル応答行列 $\boldsymbol{H}$ の性質によって伝送特性が変わることが分かる．それ故，送信側，受信側のウエイトは，推定されたチャネル応答行列 $\boldsymbol{H}$ に従って決められることになる．

4. 行列の固有値と固有ベクトル

4.1 固有値と固有ベクトルの定義と性質

正方行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ に対し，ある定数 $\lambda \in \mathbb{C}$ および $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{e} \in \mathbb{C}^N$ があり，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e} \tag{11}$$

を満足するとき，λ を $\boldsymbol{A}$ の固有値 (eigenvalue) といい，$\boldsymbol{e}$ を固有値 λ に対応する固有ベクトル (eigenvector) という．

行列 $\boldsymbol{A}$ を同じ N 次元空間 $\mathbb{C}^N$ 内での線形変換とみると，式 (11) の左辺は，ベクトル $\boldsymbol{e}$ の $\boldsymbol{A}$ による変換を表し，右辺は $\boldsymbol{e}$ の定数倍（λ 倍）であることを表している．したがって，固有ベクトルは，線形変換 $\boldsymbol{A}$ によって方向が変わらず長さのみが λ 倍になるベクトルと特徴付けることができる．

式 (11) は，右辺を移項して

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{e} = \mathbf{0} \tag{12}$$

と書き直すことができる．ただし，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．式 (12) は，$\boldsymbol{e}$ を変数ベクトルとし $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ を係数行列とした N 変数同次連立 1 次方程式である．$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ が正則であれば，式 (12) を満足する解は自明解 $\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ のみとなる．したがって，それが非自明解（$\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ でない解）をもつための必要十分条件は，係数行列が非正則，すなわち，その行列式がゼロになることである．よって，

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0 \tag{13}$$

が得られる．式 (13) の左辺の行列式は，λ に関する N 次多項式であり，一般に

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) = (-1)^N\lambda^N + (-1)^{N-1}\alpha_1\lambda^{N-1} + \cdots \\ + (-1)\alpha_{N-1}\lambda + \alpha_N \end{aligned} \tag{14}$$

と書くことができる [7]–[13]．ここで，$\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の要素からなる係数である．これを行列 $\boldsymbol{A}$ の固有多項式 (characteristic polynomial) という．そして，これをゼロとおいた式 (13) は固有方程式 (characteristic equation) と呼ばれる．

「N 次方程式は複素数の範囲内で重解を含め（たとえば k 重解を k 個の解と数えるとして）N 個の解をもつ」という「代数学の基本定理」より，N 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は，式 (13) の固有方程式の解として複素数の範囲内で重解を含めて全部で N 個あることになる．すなわち，N 個の解を λ_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$ として

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{15}$$

と表せ，λ_i はそれぞれ対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と関係づけられる．

ところで，ベクトル $\boldsymbol{e}$ を式 (11) を満足する一つの固有ベクトルとしたとき，その定数倍 $c\boldsymbol{e}$ も

$$\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{e}) = \lambda(c\boldsymbol{e}) \tag{16}$$

を満たすことから $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとなる．つまり，固有ベクトルには定数倍だけの自由度がある．したがって，通常 (例えば，MATLAB など)，固有ベクトルは

$$\boldsymbol{e}^H\boldsymbol{e} = 1 \tag{17}$$

となるように正規化される．このような固有ベクトルを正規化された固有ベクトルともいう．

以下に，固有値と固有ベクトルに関する重要な性質（定理）を列記する [7]–[13].

- 行列 $\boldsymbol{A}$ の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは一次独立である．すなわち，どの固有ベクトルも，その他の固有ベクトルの線形結合で表すことができない．
- エルミート行列（$\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}$ となる行列）の固有値はすべて実数である．例えば，アレーアンテナの受信ベクトルの相関行列 $\boldsymbol{R}_{xx}$ はエルミート行列であるので，その固有値は実数である．
- エルミート行列の相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する．すなわち，内積がゼロである．
- 正方行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ とその固有値 λ_i $(i = 1, \cdots, N)$ に対して

  $$\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i$$

  （行列 $\boldsymbol{A}$ の対角和と $\boldsymbol{A}$ の固有値の和は等しい）

  $$\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{N}\lambda_i$$

  （行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式と $\boldsymbol{A}$ の固有値の積は等しい）

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}\ \text{のゼロでない固有値の数})$$

ただし，trace(·) は行列の対角和，det(·) は行列式，rank(·) は行列のランク（階数）を表す．

4.2 エルミート行列の固有値分解

$\boldsymbol{A}$ を N 次のエルミート行列とし，固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ に対応する正規化された固有ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_N$ とする．ある固有値 λ_m が k ($k \leq N$) 重解の場合には，対応する固有空間の次元は k であるので，その中で正規直交ベクトルを k 個とり，それらを λ_m に対応する固有ベクトルとする．このとき，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, \cdots, N) \tag{18}$$

であるが，それらを並べて書いた行列

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_N] = [\lambda_1\boldsymbol{e}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{e}_N] \tag{19}$$

は，固有値を対角要素にもつ対角行列

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\} \tag{20}$$

および，対応する固有ベクトルをその順に並べた行列

$$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_N] \tag{21}$$

を用いて

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D} \tag{22}$$

と書くことができる．ここで $\boldsymbol{E}$ は，異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交し，同じ固有値（重解）に対応する固有ベクトルは直交するように取っているので，各列が互いに直交する正規化されたベクトルとなる．したがって

$$\boldsymbol{E}^H\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^H = \boldsymbol{I} \tag{23}$$

を満足するユニタリ行列（実数空間では直交行列）である．この関係を使うと，エルミート行列 $\boldsymbol{A}$ はユニタリ行列 $\boldsymbol{E}$ により，以下のように対角化される．

式 (22) の左から $\boldsymbol{E}^H$ をかけると，式 (23) より

$$\boldsymbol{E}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} \tag{24}$$

となる．

また，式 (22) の右から $\boldsymbol{E}^H$ をかけ，式 (23) の関係を使うと，$\boldsymbol{A}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}^H \\ &= \lambda_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^H + \lambda_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2^H + \cdots + \lambda_n\boldsymbol{e}_N\boldsymbol{e}_N^H\end{aligned}$$

と分解される．この分解をエルミート行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値分解（固有値展開） (eigenvalue demonposition: EVD) あるいはスペクトル分解 (spectral decomposition) という．

さらに，エルミート行列 $\boldsymbol{A}$ が正則，すなわち，すべての固有値が非ゼロであれば，$\boldsymbol{A}$ の逆行列が次にように表される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1} &= \left(\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}^H\right)^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}^H \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^H + \frac{1}{\lambda_2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2^H + \cdots + \frac{1}{\lambda_N}\boldsymbol{e}_N\boldsymbol{e}_N^H\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}^H$，$\left(\boldsymbol{E}^H\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{E}^{-1}\right)^H$ の関係を利用している．こうして，エルミート行列が固有値分解されている場合，その逆行列は上式を用いて容易に導出できる．

4.3 アレーアンテナにおける固有値と固有ベクトルの例

図 2 の K 素子アレーアンテナにおいて，受信ベクトルの相関行列 $\boldsymbol{R}_{xx}$ の固有値と固有ベクトルがどのような役割をもつのかを説明する．

相関行列 $\boldsymbol{R}_{xx}$ の固有値と固有ベクトルをそれぞれ λ_k，$\boldsymbol{e}_k$ ($k = 1, \cdots, K$) とする．したがって，次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{e}_k = \lambda_k\boldsymbol{e}_k \ \ (k = 1, \cdots, K) \tag{25}$$

さらに，相関行列はエルミート行列（$\boldsymbol{R}_{xx}^H = \boldsymbol{R}_{xx}$）であるので，固有値は実数となり，固有ベクトルは互いに直交する，すわなち，

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_K \tag{26}$$

$$\boldsymbol{e}_i^H\boldsymbol{e}_k = \delta_{ik} \ \ (i, k = 1, \cdots, K) \tag{27}$$

と表すことができる．ここに，δ_{ik} はクロネッカーのデルタである．

式 (25) の両辺に，左から $\boldsymbol{e}_k^H$ を乗じると

$$\boldsymbol{e}_k^H\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{e}_k = \lambda_k\boldsymbol{e}_k^H\boldsymbol{e}_k = \lambda_k \tag{28}$$

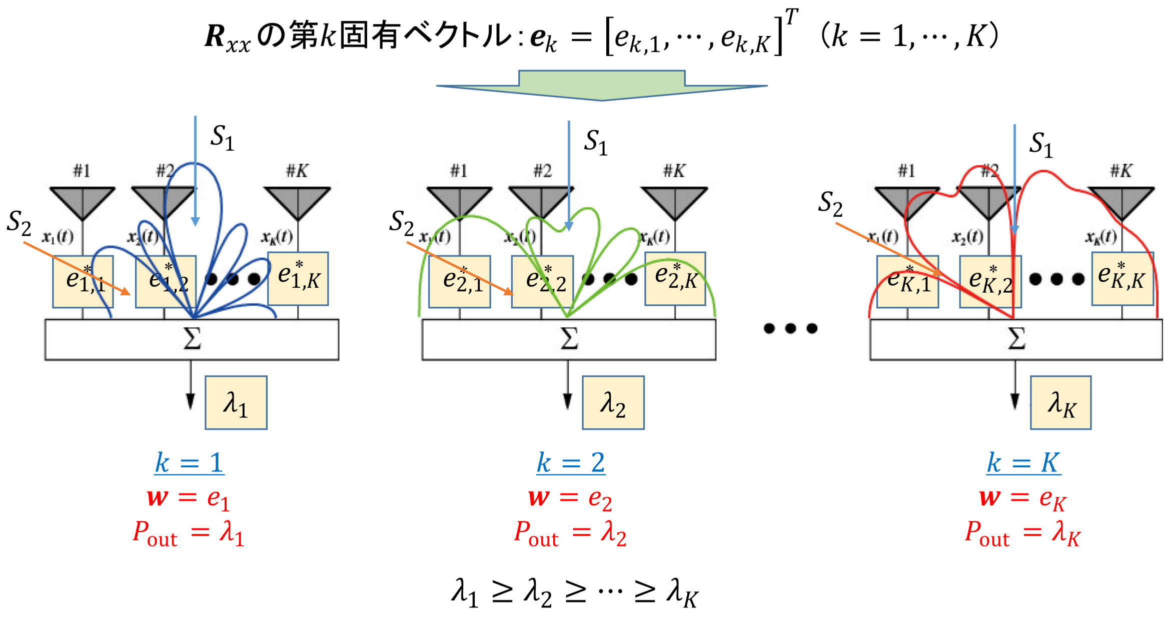

図 4　K 素子アレーアンテナにおける固有値と固有ベクトルの例

が得られる．これは，固有ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ をアレーアンテナのウエイト $\boldsymbol{w}$ として用いると，そのときのアレーの出力電力 $P_{\mathrm{out}} = \boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_{xx} \boldsymbol{w}$ は固有値 λ_k に等しいことを意味している．この関係を示したのが図 4 である．例えば，最大固有値 λ_1 に対応した固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ をウエイトとして用いると極力すべての到来波を受信して最大電力が得られる．これはダイバーシチ受信の最大比合成方式である [1]–[4]．逆に，最小固有値 λ_K に対応した固有ベクトル $\boldsymbol{e}_K$ をウエイトとして採用すると，出力は最小電力となり，アレーアンテナの指向性パターンにおいては，すべての到来波に指向性のヌルを向けることになる．この特性を利用したものが，MUSIC (Multiple Signal Classification) アルゴリズムなどの高分解能到来方向推定である [5], [6]．

また，異なる固有ベクトル $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k$ $(i \neq k)$ によるアレー出力は $y_i(t) = \boldsymbol{e}_i^H \boldsymbol{x}(t)$, $y_k(t) = \boldsymbol{e}_k^H \boldsymbol{x}(t)$ と表され，両信号の相関は，式 (27) の関係を用いて，以下のようにゼロであることが導かれる．

$$\begin{aligned} E[y_i(t) y_k^*(t)] &= \boldsymbol{e}_i^H E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^H(t)]\boldsymbol{e}_k \\ &= \boldsymbol{e}_i^H \boldsymbol{R}_{xx} \boldsymbol{e}_k \\ &= \lambda_k \boldsymbol{e}_i^H \boldsymbol{e}_k \\ &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

このように，異なる固有ベクトルによるアレー出力は互いに無相関となり，直交マルチビームと呼ばれている．これも固有ベクトルによるアレー出力の大きな特徴である．

4.4　一般固有値問題とレイリー商

行列の固有値と固有ベクトルは，二つの行列に対する問題として以下のように拡張できる．正方行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ に対し，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{e} \tag{30}$$

を満たす定数 λ を $\boldsymbol{B}$ に関する $\boldsymbol{A}$ の一般固有値といい，$\boldsymbol{e}$ を λ に対応した $\boldsymbol{B}$ に関する $\boldsymbol{A}$ の一般固有ベクトルという．式 (30) は

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B})\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \tag{31}$$

となるので，λ は一般化された固有方程式 (generalized characteristic equation)

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{B}| = 0 \tag{32}$$

の N 個の解として得られる．

式 (30) の固有値問題は一般固有値問題または一般化固有値問題と呼ばれ，これと区別するために $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ とした式 (11) の固有値問題を標準固有値問題と呼ぶ．

さて，任意ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^K$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ に対して，エルミート行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{K\times K}$ $(\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^H = \boldsymbol{B})$ のレイリー商 $R(\boldsymbol{x})$ は次式で定義される [7].

$$R(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}} \tag{33}$$

これは二次形式の比である．例えば，アレーアンテナの正規化ウエイトによる出力電力は

$$P_{\text{out}} = \frac{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_{xx} \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{w}} \tag{34}$$

で与えられ，レイリー商の形となっている．また，アレーアンテナの出力 SINR (Signal-to-Interference-plus-Noise power Ratio) は

$$\text{SINR} = \frac{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_{ss} \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^H \boldsymbol{R}_{nn} \boldsymbol{w}} \tag{35}$$

$\boldsymbol{R}_{ss}$：所望波の相関行列

$\boldsymbol{R}_{nn}$：干渉波及び内部雑音の相関行列

で表され，同様に，レイリー商の形をとる [5], [6].

式 (33) のレイリー商の最大化あるいは最小化問題は

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^*} R(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}) \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{x})^2} = \boldsymbol{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^H \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}} \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = R(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$$

$$(R(\boldsymbol{x}) \equiv \lambda)$$

のように，一般固有値問題に帰着される．したがって，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ の一般固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$，一般固有値を λ_i $(i = 1, \cdots, K)$ とすると，レイリー商 $R(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}_i$ に対して極値 λ_i をとる．さらに，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_K$ であるとすると，

$$R(\boldsymbol{x}_1) = \lambda_1 = \text{最大値}$$
$$R(\boldsymbol{x}_K) = \lambda_K = \text{最小値}$$

となる．

図 5 に無線システムにおけるレイリー商の活用例を示す．本稿では説明しないが，アレーアンテナの指向性利得も容易にレイリー商で表現できる．また，マルチユーザ MIMO においてもレイリー商を利用したシステムの最適化が行われている [14]．このようにして，無線システムでは，行列の固有値と固有ベクトルが，システムの特性解析および最適化に利用されている．

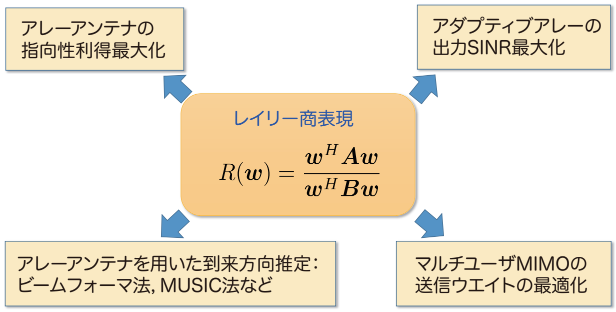

図 5　無線システムにおけるレイリー商の活用例

5.　行列の特異値と特異ベクトル

正方行列の性質は固有値分解（展開）によって記述されたが，一般の正方とは限らない行列に対しては，本節で説明する特異値分解が重要な役割を果たす．特に，未知ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N$ に対する線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（係数行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{M\times N}$，定数ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^M$）を解く場合，係数行列 $\boldsymbol{A}$ の特異値分解が有効なツールとなる．

5.1　特異値と特異ベクトルの定義

$\boldsymbol{A}$ を $M \times N$ 行列とし $M \geq N$ であるとする（そうでない場合には転置行列を改めて $\boldsymbol{A}$ とすればよい）．$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ は N 次のエルミート行列，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ は M 次のエルミート行列あり，それらの固有値と固有ベクトルの性質については前節で述べた．ここでは，$\boldsymbol{A}$ 自身の分解を考える．

まず，$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の固有値，固有ベクトルの関係をみる．

定理 1（$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の固有値の性質）

任意の $M \times N$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対し，$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の 0 でない固有値は等しい．

証明 λ_i を $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ の 0 でない固有値とし，$\boldsymbol{v}_i$ をその固有ベクトルとすると

$$\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \tag{36}$$

と書ける．この式の両辺の左から $\boldsymbol{A}$ をかけると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_i \tag{37}$$

となるので，$\boldsymbol{u}_i = a_i \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i$ （a_i：定数）とおくと

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i \tag{38}$$

となる．これより, λ_i は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の固有値でもある．

逆に，λ_i を $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の 0 でない固有値とし，$\boldsymbol{u}_i$ をその固有ベクトルとすると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i \tag{39}$$

と書ける．この式の両辺の左から $\boldsymbol{A}^H$ をかけると

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H \boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{u}_i \tag{40}$$

となるので，$\boldsymbol{v}_i = b_i \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{u}_i$（$b_i$：定数）とおくと

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} \boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \tag{41}$$

となる．よって，λ_i は $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ の固有値でもある．

したがって，$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の 0 でない固有値は等しい． （証明終）

$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の固有ベクトルについては次の関係がある．

定理 2 （$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の固有ベクトルの関係）

固有値 λ_i に対応する $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ の正規化された固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$，および同じ λ_i に対応する $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ の間には

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{u}_i \tag{42}$$

の関係がある．

証明 定理 1 の証明から

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_i &= a_i \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i && (a_i\text{：定数}) \\ \boldsymbol{v}_i &= b_i \boldsymbol{A}^H\boldsymbol{u}_i && (b_i\text{：定数}) \end{aligned}$$

の関係があることが示される．各固有ベクトルを $\|\boldsymbol{u}_i\| = \|\boldsymbol{v}_i\| = 1$ と正規化すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_i^H\boldsymbol{u}_i &= |a_i|^2 \boldsymbol{v}_i^H\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = |a_i|^2\lambda_i = 1 \\ \boldsymbol{v}_i^H\boldsymbol{v}_i &= |b_i|^2 \boldsymbol{u}_i^H\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{u}_i = |b_i|^2\lambda_i = 1 \end{aligned}$$

となり，a_i, b_i を正の実数とすると

$$a_i = b_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

が得られる． （証明終）

$M \times N$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクを $r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) \le N$ とすると，$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ は共にランク r の半正定値エルミート行列となる [7]–[13]．それ故，これらの行列は共に r 個の正の固有値 λ_i $(i = 1, \cdots, r)$ をもち [7]，それらは定理 1 より互いに等しくなる．そして，$M \times N$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の分解には以下で定義する特異値，特異ベクトルが主要な役割を果たす．

定義 1 （特異値と特異ベクトル）

ランク r の $M \times N$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対し，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ あるいは $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ の 0 でない固有値 λ_i $(i = 1, \cdots, r)$ の正の平方根

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{43}$$

を $\boldsymbol{A}$ の特異値 (singular value) という．また，λ_i に対応する $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を $\boldsymbol{A}$ の左特異ベクトル (left singular vector), $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ の正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を $\boldsymbol{A}$ の右特異ベクトル (right singular vector) という．

5.2 行列の特異値分解

本項では，行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{M\times N}$ の特異値，特異ベクトルによる分解を与える．

定理 3 （特異値分解）

ランク r の $M \times N$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の r 個の特異値を対角要素にもつ r 次の対角行列を

$$\boldsymbol{S}_1 = \mathrm{diag}\{\mu_1, \cdots, \mu_r\} \tag{44}$$

とし，対応する $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ および $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ の正規化された固有ベクトルを順に並べた $M \times r$ 行列および $N \times r$ 行列を，それぞれ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_1 &= [\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r] \in \mathbb{C}^{M\times r} \\ \boldsymbol{V}_1 &= [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r] \in \mathbb{C}^{N\times r} \end{aligned}$$

とするとき，行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{V}_1^H \\ &= \mu_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^H + \mu_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^H + \cdots + \mu_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^H \end{aligned} \tag{45}$$

と分解される．また，行列 $\boldsymbol{U}_2$，$\boldsymbol{V}_2$ を，$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2] \in \mathbb{C}^{M\times M}$，$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2] \in \mathbb{C}^{N\times N}$ が共にユニタリ行列になるように選び（$\boldsymbol{U}_2$ は $\boldsymbol{U}_1$ の

直交補空間，$\boldsymbol{V}_2$ は $\boldsymbol{V}_1$ の直交補空間)，$\boldsymbol{S}$ を

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_1 & \boldsymbol{0}_{r\times(N-r)} \\ \boldsymbol{0}_{(M-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(M-r)\times(N-r)} \end{bmatrix} \tag{46}$$

で定義される $M \times N$ 行列としたとき，行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^H \tag{47}$$

と表される．式 (45) あるいは式 (47) の分解を行列 $\boldsymbol{A}$ の特異値分解 (singular-value decomposition: SVD) という．

<u>**証明**</u> 行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{M\times N}$ の各列ベクトルは $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H$ の固有ベクトル $\boldsymbol{U}_1$ の線形結合で一意的に表される [5], [6] ので，係数行列の役割をもつ，ある正則行列 $\boldsymbol{T} \in \mathbb{C}^{r\times r}$ によって

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{T} \tag{48}$$

と書くことができる．ここで，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^H\boldsymbol{U}_1^H$ となること，および固有値分解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{U}_1^H$ より，$\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^H = \boldsymbol{D}_1 \tag{49}$$

を満たす行列であることが分かる．次に，$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A}$ の固有値分解より

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^H\boldsymbol{U}_1^H\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^H\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{V}_1^H \tag{50}$$

となり，$\boldsymbol{G}$ を適当なユニタリ行列として

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{D}_1^{1/2}\boldsymbol{V}_1^H \tag{51}$$

と表される．ところが，

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^H = \boldsymbol{G}\boldsymbol{D}_1^{1/2}\boldsymbol{V}_1^H\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{D}_1^{1/2}\boldsymbol{G}^H = \boldsymbol{G}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{G}^H = \boldsymbol{D}_1$$

であるので，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I}$ である必要がある．したがって，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}_1^{1/2}\boldsymbol{V}_1^H$ となり，

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{D}_1^{1/2}\boldsymbol{V}_1^H = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{V}_1^H \tag{52}$$

となる． （証明終）

5.3 MIMO システムにおける特異値と特異ベクトル

MIMO システムにおいて送信ウエイト行列を $\boldsymbol{W}_t$，受信ウエイト行列を $\boldsymbol{W}_r$ とすると，式 (10) の入出力関係は次式で表される．

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{W}_r\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{x}(t) \tag{53}$$

ここで，$\mathrm{rank}() = r \le \min(M, N)$ として，チャネル応答行列 $\boldsymbol{H}$ を以下のように特異値分解する．

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^H \tag{54}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r & \boldsymbol{0}_{r\times(N-r)} \\ \boldsymbol{0}_{(M-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(M-r)\times(N-r)} \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$\boldsymbol{S}_r = \mathrm{diag}\{\mu_1, \cdots, \mu_r\} \tag{56}$$

ここに，$\mu_1, \cdots, \mu_r$ は r 個の非ゼロ特異値である．また，$\boldsymbol{U}$ は左特異ベクトルが列に並ぶ N 次のユニタリ行列，$\boldsymbol{V}$ は右特異ベクトルが列に並ぶ M 次のユニタリ行列である．

送信と受信のウエイト行列 $\boldsymbol{W}_t$，$\boldsymbol{W}_r$ を

$$\boldsymbol{W}_t = \boldsymbol{V} \qquad \boldsymbol{W}_r = \boldsymbol{U}^H$$

とおくと，式 (53) は以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{W}_r\boldsymbol{H}\boldsymbol{W}_t\boldsymbol{x}(t) \\ &= \boldsymbol{U}^H\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^H\boldsymbol{V}\boldsymbol{x}(t) \\ &= \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{57}$$

このように，r 個の干渉のないチャネルが確保される．この伝送方式は固有モード伝送（E-SDM: Eigenbeam-Space Division Multiplexing）と呼ばれ，図 6 のようなイメージとなる．

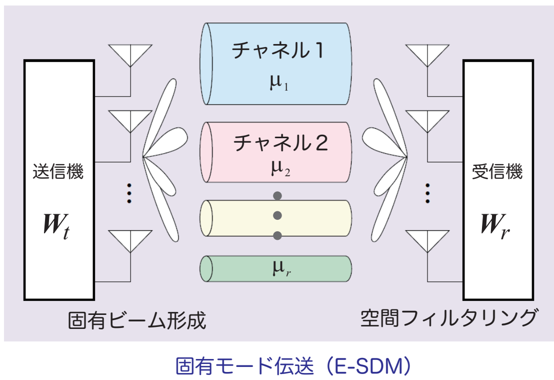

図 6　MIMO システムにおける固有モード伝送（E-SDM）

5.4 特異値分解を利用した行列の一般逆行列

未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{A}$：係数行列，$\boldsymbol{b}$：定数ベクトル）において，行

列 $\boldsymbol{A}$ が正方行列で正則であれば，逆行列が存在して，未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{58}$$

の形で得られる．係数行列 $\boldsymbol{A}$ が正方行列でない場合は，どのように解けば良いであろうか．

ここで，特異値分解を利用する．係数行列 $\boldsymbol{A}$ が $M \times N$ の行列で，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = r \leq \min(M, N)$ あるとして，その特異値分解が

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^H \tag{59}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r & \boldsymbol{0}_{r\times(N-r)} \\ \boldsymbol{0}_{(M-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(M-r)\times(N-r)} \end{bmatrix} \tag{60}$$

$$\boldsymbol{S}_r = \mathrm{diag}\{\mu_1, \cdots, \mu_r\} \tag{61}$$

で表されるとする．ここに，$\mu_1, \cdots, \mu_r$ は r 個の非ゼロ特異値である．また，$\boldsymbol{U}$ は左特異ベクトルが列に並ぶ N 次のユニタリ行列，$\boldsymbol{V}$ は右特異ベクトルが列に並ぶ M 次のユニタリ行列である．このとき，$\boldsymbol{A}$ の一般逆行列（ムーアペンローズの一般逆行列）が次式で定義される [9]．

$$\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}^H \tag{62}$$

$$\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_r^{-1} & \boldsymbol{0}_{r\times(M-r)} \\ \boldsymbol{0}_{(N-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(N-r)\times(M-r)} \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$\boldsymbol{S}_r^{-1} = \mathrm{diag}\left\{\frac{1}{\mu_1}, \cdots, \frac{1}{\mu_r}\right\} \tag{64}$$

一般逆行列を用いた解 $\boldsymbol{x}_\mathrm{o} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b}$ は，$M > N$ の場合

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{o} = \arg\min \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 \tag{65}$$

であり，$M < N$ の場合は，

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{o} = \arg\min \|\boldsymbol{x}\|^2 \text{ subject to } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{66}$$

となる．したがって，一般逆行列は，線形方程式を最小 2 乗問題をとしてとらえ，近似解を求めるものである．

6. むすび

本基礎講座では，アレーアンテナ・マルチアンテナを基本として無線システムを理解し，解析するためのツールとして複素数を扱う線形代数を解説した．行列・ベクトルを使うと，いかにシステムの理解が容易になるかを示したつもりである．今後，機械学習でビックデータを扱うことが多くなる．それに伴って，行列も大規模・多次元化し，益々，線形代数が活躍するものと思われる．アレー信号処理を用いて研究や開発を行う研究者・学生の皆様に，本基礎講座が一助または何かのきっかけとなれば幸いである．

文　献

[1] 大鐘武雄, 小川恭孝, わかりやすい MIMO システム技術, オーム社 (2009).

[2] 小川恭孝, “MIMO 技術の基礎と応用,” 信学会 MIKA2019 (Oct. 2019).

[3] 小川恭孝, “MIMO 技術の基本と応用,” MEW2019, WE6B-1 (Nov. 2019).

[4] 西森健太郎, マルチユーザ MIMO の基礎, コロナ社 (2014).

[5] 菊間信良, アダプティブアンテナ技術, オーム社 (Oct. 2003).

[6] 菊間信良, アレーアンテナによる適応信号処理, 科学技術出版 (Aug. 2004).

[7] ツルミュール (著), 瀬川富士, 高市成方 (訳), マトリクスの理論と応用，ブレイン図書出版株式会社 (1972).

[8] D. H. Brandwood, “A Complex Gradient Operator and Its Application in Adaptive Array Theory”, Proc. IEE, vol.130, Pts.F and H, No.1, pp.11–16 (Feb. 1983).

[9] 柳井晴夫, 竹内啓, 射影行列・一般逆行列・特異値分解, 東京大学出版会 (1983).

[10] 岩崎学, 吉田清隆, 統計的データ解析入門 線形代数, 東京図書 (2006).

[11] 張賢達 (原著), 和田清 (監訳), 楊子江, 金江春植 (訳), 信号処理のための線形代数, 森北出版株式会社 (Jan. 2008).

[12] 池辺八洲彦, 池辺淑子, 浅井信吉, 宮崎佳典, 現代線形代数－分解定理を中心として－，共立出版 (Apr. 2009).

[13] 奥村浩士, 電気電子情報のための線形代数, 朝倉書店 (Mar. 2015).

[14] N. Kikuma, K. Yonezu, and K. Sakakibara, “Performance Analysis of Block MSN Algorithm with Pseudo-Noise Control in Multi-User MIMO System,” IEICE Trans. Communications, Vol.E102-B, No.2, pp.224–232 (Feb. 2019).

著者紹介

菊間 信良　名古屋工業大学　教授
kikuma@nitech.ac.jp