

# $S$ パラメタの基礎

## Fundamentals of $S$ -parameters

河合 正

Tadashi KAWAI

兵庫県立大学 大学院工学研究科 電子情報工学専攻  
Graduate School of Engineering, University of Hyogo

### 概要

本講座では、マイクロ波・ミリ波など高周波数帯における各種回路の解析，設計，測定や材料評価などにおいて重要な指標となる  $S$  パラメタ（散乱パラメタ），また， $S$  パラメタを要素とする散乱行列について概説する．ここでは，図 1 に示す無損失の  $N$  ポート回路網を取り扱うものとし，初めに伝送線路理論に基づいて  $S$  パラメタの定義を示した上で， $S$  パラメタの物理的意味，性質（相反性，ユニタリ性），また，測定等において重要と考えられる  $S$  パラメタの参照面の移動について述べる．次に，無損失回路の散乱行列がユニタリ行列となることから，図 3 に示す 3 ポートならびに 4 ポート回路について，ユニタリ条件を元にその特性について記述する．

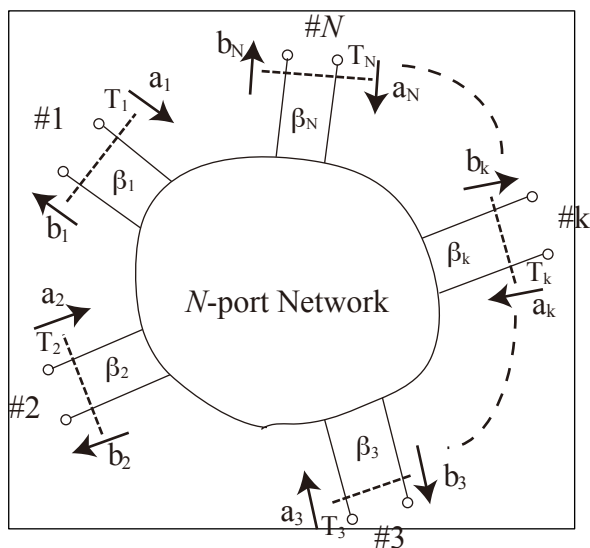


図 1 N ポート回路網

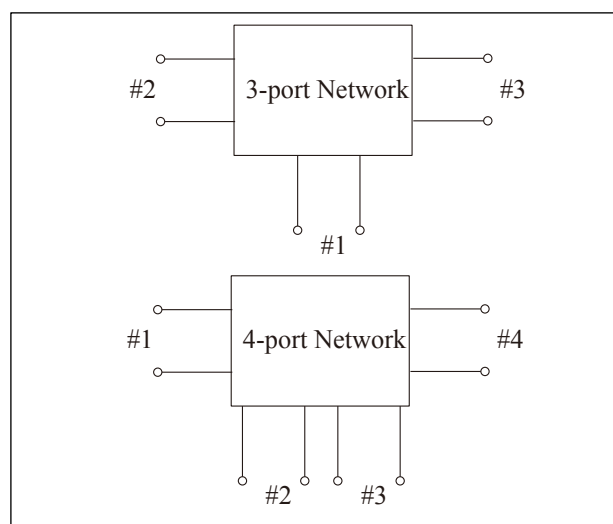


図 3 3 ポート / 4 ポート回路網

### Abstract

In this course, we outline the scattering parameter ( $S$ -parameter) which is an important parameter in the analysis, design, measurement of various circuits, and material evaluation in high frequency region including microwave and millimeter wave. We treat lossless  $N$ -port networks, and firstly describe the definition of scattering parameters based on the transmission line theory. Then we describe the physical meaning and properties of scattering parameters. Next, the unitary property which is important as the property of lossless circuits is taken up, and characteristics of 3-port and 4-port networks are described.

## 1. はじめに

マイクロ波・ミリ波など高周波数帯における各種回路の解析, 設計, 評価 (測定), また材料評価などをする上で,  $S$  パラメタ (散乱パラメタ) は重要な指針である. 本講座では, 無損失の  $N$  ポート回路網を対象として伝送線路理論に基づいて  $S$  パラメタの定義から始め, その物理的な意味を示すと共に, 重要な性質として相反性 (可逆性), ユニタリ性などについて説明する. 更に, それらの性質を元に, 無損失 3 ポートならびに 4 ポート回路網の特性についても記述する.

## 2. 散乱行列の定義

図 1 に示す  $N$  ポート回路網について考える. ここで, 回路は無損失として取り扱う. また,  $\beta_k$  は  $k$  番目ポートの伝送線路の位相定数を表している. 各ポートの伝送線路上の電圧, 電流は伝送線路理論から入射波 (incident wave) と反射波 (reflection wave) の重ね合わせで表現ができ, 次式で表される.

$$V_k(z) = V_{ki}e^{-j\beta_k z} + V_{kr}e^{j\beta_k z} \quad (1a)$$

$$I_k(z) = \frac{V_{ki}}{Z_{0k}}e^{-j\beta_k z} - \frac{V_{kr}}{Z_{0k}}e^{j\beta_k z} \quad (1b)$$

ここで, 下付添え字の  $i$  は入射波,  $r$  は反射波を表している. また,  $Z_{0k}$  は  $k$  番目ポートの伝送線路の特性インピーダンスを表している. 上式を用いて伝送線路上の入射波電力  $P_{ki}$  と反射波電力  $P_{kr}$  を計算すれば, それぞれ次式となる.

$$P_{ki} = \frac{1}{2}V_{ki}e^{-j\beta_k z} \left( \frac{V_{ki}e^{-j\beta_k z}}{Z_{0k}} \right)^* = \frac{|V_{ki}|^2}{2Z_{0k}} \quad (2a)$$

$$P_{kr} = \frac{1}{2}V_{kr}e^{j\beta_k z} \left( \frac{V_{kr}e^{j\beta_k z}}{Z_{0k}} \right)^* = \frac{|V_{kr}|^2}{2Z_{0k}} \quad (2b)$$

いま,  $k$  番目ポートの伝送線路上の任意の位置に入射波, 反射波の位相の基準面 (参照面) を仮定して, その基準面における正規化入射波/反射波振幅  $a_k, b_k$  が次式を満たすよう定義する.

$$P_{ki} = \frac{|V_{ki}|^2}{2Z_{0k}} = \frac{1}{2}a_k a_k^* = \frac{1}{2}|a_k|^2 \quad (3a)$$

$$P_{kr} = \frac{|V_{kr}|^2}{2Z_{0k}} = \frac{1}{2}b_k b_k^* = \frac{1}{2}|b_k|^2 \quad (3b)$$

これにより入射波と反射波の各振幅は

$$a_k = \frac{V_{ki}}{\sqrt{Z_{0k}}}e^{-j\beta_k z} \quad (4a)$$

$$b_k = \frac{V_{kr}}{\sqrt{Z_{0k}}}e^{j\beta_k z} \quad (4b)$$

と表現できる. 従って, 上式を用いれば,  $k$  番目ポートの伝送線路上の電圧, 電流は以下の式で表される.

$$V_k(z) = \sqrt{Z_{0k}}(a_k + b_k) \quad (5a)$$

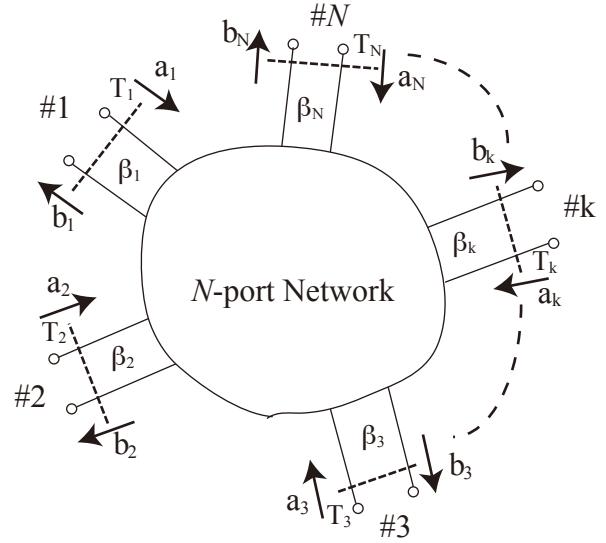


図 1 N ポート回路網と基準面

$$I_k(z) = \frac{1}{\sqrt{Z_{0k}}}(a_k - b_k) \quad (5b)$$

また逆に入射波/反射波正規化振幅を電圧, 電流で書き直せば

$$a_k = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{Z_{0k}}}V_k(z) + \sqrt{Z_{0k}}I_k(z) \right) \quad (6a)$$

$$b_k = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{Z_{0k}}}V_k(z) - \sqrt{Z_{0k}}I_k(z) \right) \quad (6b)$$

となる.

$N$  ポート回路網内の 2 つのポートの電圧と電流は線形関係にあることから, 前述した正規化入射波/反射波振幅  $a_k, b_k$  も同様に線形関係となることが分かる. このことを行列表示すれば

$$[b] = [S][a] \quad (7)$$

と書くことができる. 式(7)の  $[a], [b]$  は  $N$  ポート回路網の各ポートの正規化入射波/反射波振幅を要素とする列ベクトルで

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, [b] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (8a,b)$$

と表され, 式(7)の  $[S]$  が散乱行列である.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3. 散乱行列の性質

#### 3.1 物理的意味

図1に示す  $N$  ポート回路網において、 $i$  番目ポート以外の全てのポートが整合されているとすれば、

$$a_k = 0 \quad (k \neq i) \quad (10)$$

であるから、上式を式(7)に代入することで、次式を得る。

$$b_i = S_{ii}a_i \quad (11a)$$

$$b_j = S_{ji}a_i \quad (11b)$$

上式について考察するものとする。式(11a)より

$$S_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{a_j=0(i \neq j)} \quad (12)$$

と書き表せる。上式は  $i$  番目ポート以外の全てのポートを整合させた時の  $i$  番目ポートの反射係数（入射波電圧と反射波電圧の振幅比）を表す。同様に考えると、式(11b)より

$$S_{ji} = \left. \frac{b_j}{a_i} \right|_{a_j=0(i \neq j)} \quad (13)$$

となり、これは  $i$  番目ポート以外の全てのポートを整合させた時の  $i$  番目ポートから  $j$  番目ポートへの透過係数を表している。

次に、図1の  $N$  ポート回路網にフェライトなど非可逆素子が含まれていなければ、散乱行列要素は可逆性を示し、以下の式が成立する。

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (14)$$

上式を満たす回路は相反回路（可逆回路）と呼ばれる。

#### 3.2 ユニタリ性

図1の  $N$  ポート回路網が無損失であると仮定すれば、回路網に入力された電力と回路網から出力される電力は等しくなるというエネルギーの保存則が成立しなければならない。

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (a_i a_i^* - b_i b_i^*) = 0 \quad (15)$$

上式を行列表示すれば

$$[a^*]^t [a] - [b^*]^t [b] = 0 \quad (16)$$

となる。上式に式(7)を代入すると

$$[a^*]^t [a] - [a^*]^t [S^*]^t [S] [a] = 0 \quad (17)$$

と書くことができ、散乱行列に関して以下の式を導出できる。

$$[S^*]^t [S] = [I] \quad (18a)$$

$$[S^*]^t = [S]^{-1} \quad (18b)$$

ここで、式(18a)の  $[I]$  は単位行列を表し、上式を満足する行列  $[S]$  をユニタリ行列と呼び、無損失  $N$  ポート回路の散乱行列はユニタリ行列となる。

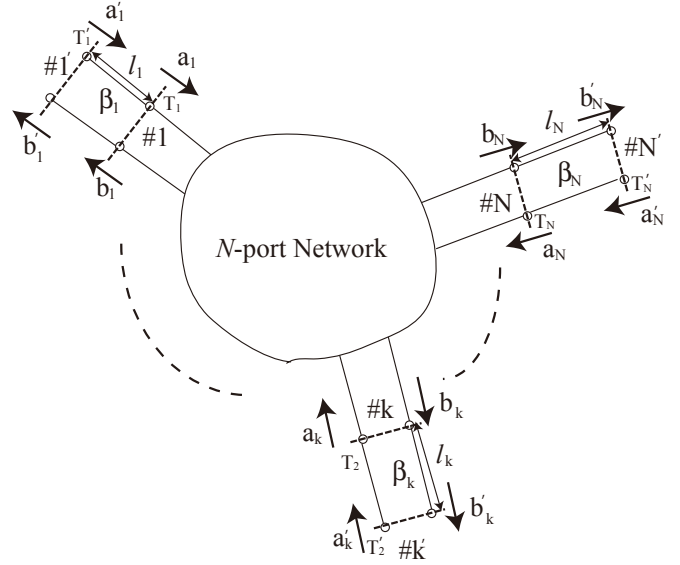


図2 Sパラメタの基準面の移動

#### 3.3 参照面の移動

散乱行列は、図1に示した通り各ポートの伝送線路上の任意の位置における入射波と反射波から求められることから、その位置（参照面）の設定が必要になる。各種回路の解析、測定において、この参照面の移動がよく行われる。従って、ここでは図2に示すように、 $N$  ポート回路網において各ポートの伝送線路上の参照面を移動させた際の散乱行列の導出を行うこととする。

参照面  $(T_k)$  を移動する前の各ポートの伝送線路上の正規化入射波振幅と正規化反射波振幅からなる列ベクトルをそれぞれ  $[a]$ ,  $[b]$ 、散乱行列を  $[S]$  とする。この参照面をそれぞれ別の方向（ポート側）に移動した新しい参照面  $(T'_k)$  における正規化入射波振幅と正規化反射波振幅からなる列ベクトルをそれぞれ  $[a']$ ,  $[b']$ 、散乱行列を  $[S']$  とすれば、

$$[b] = [S][a] \quad (19a)$$

$$[b'] = [S'][a'] \quad (19b)$$

と書き表せる。ここで、各伝送線路上での位相角  $\beta_k l_k$  を用いて以下の行列

$$[T] = \begin{bmatrix} e^{-j\beta_1 l_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_2 l_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-j\beta_N l_N} \end{bmatrix} \quad (20)$$

を定義すれば、

$$[a] = [T][a'] \quad (21a)$$

$$[b'] = [T][b] \quad (21b)$$

と書くことができる。式(19a)を式(21b)に代入し、さらに式(21a)の関係を用いれば次式を得る。

$$[b'] = [T][b] = [T][S][a] = [T][S][T][a'] \quad (22)$$

上式と式(19b)を比較すれば、参照面移動後の散乱

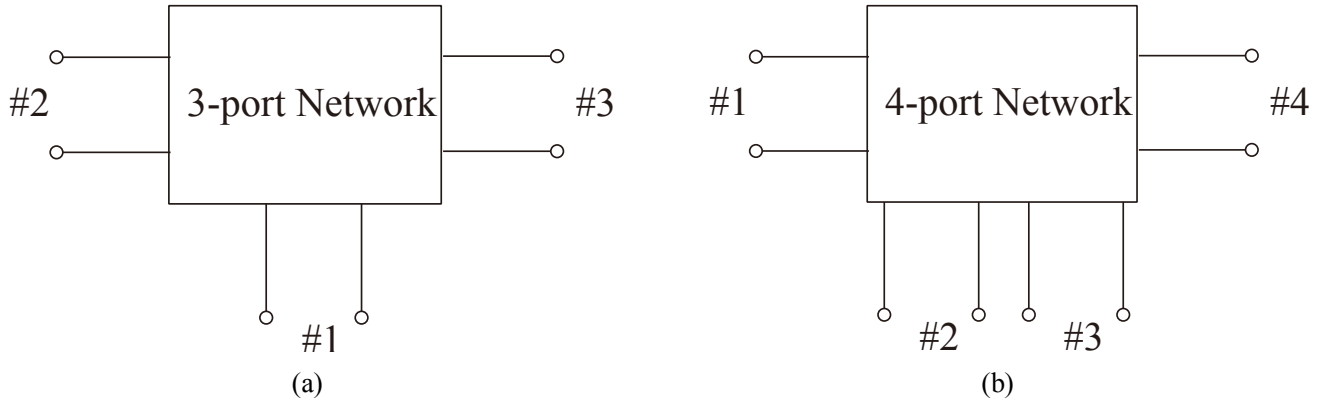


図3 (a)3ポート回路網と(b)4ポート回路網

行列 $[S']$ は

$$[S'] = [T][S][T] \quad (22)$$

と書ける.

#### 4. $N$ ポート回路網

##### 4.1 3ポート回路網

3ポート回路網の散乱行列は9つの要素を用いて次式で表される.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (23)$$

前節で述べた通り、回路内に非可逆素子を含まない場合、散乱行列要素は相反性( $S_{ij} = S_{ji}$ )を示す. 更に、全てのポートが整合されていると仮定すれば、式(23)は次式のように変形できる.

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

回路網が無損失であれば、ユニタリ性が満足されるため、式(18)より次の関係を得る.

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (25a)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (25b)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (25c)$$

$$S_{13}^* S_{23} = 0 \quad (26a)$$

$$S_{23}^* S_{12} = 0 \quad (26b)$$

$$S_{12}^* S_{13} = 0 \quad (26c)$$

式(26)から $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{23}$ の3つの要素のうち、少なくとも2つは0となる必要があることが分かる. しかしながら、その場合、式(25)のいずれかの式が満足されないことが容易に分かる. このことから無損失で相反な3ポート回路網は全てのポートが整合される完全整合は実現できないことが分かる.

そこで3ポート回路網に非相反性、すなわち $S_{ij} \neq S_{ji}$ があるものとすれば完全整合が可能となることを次に示す. この場合の散乱行列は

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

となり、ユニタリ条件より次式を得る.

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (28a)$$

$$|S_{21}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (28b)$$

$$|S_{31}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \quad (28c)$$

$$S_{31}^* S_{32} = 0 \quad (29a)$$

$$S_{21}^* S_{23} = 0 \quad (29b)$$

$$S_{12}^* S_{13} = 0 \quad (29c)$$

上式を満足する場合として、以下の2通りが考えられる.

$$S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0, |S_{21}| = |S_{32}| = |S_{13}| = 1 \quad (30a)$$

$$S_{21} = S_{32} = S_{13} = 0, |S_{12}| = |S_{23}| = |S_{31}| = 1 \quad (30b)$$

式(30a)の散乱行列は

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (31a)$$

となり、図4に示す時計方向のサーキュレータとなる. サーキュレータはアンテナと送信機/受信機間の信号の分離に用いられる素子である. 同様に、式(30b)を満足する場合、反時計方向のサーキュレータの特性を表す.

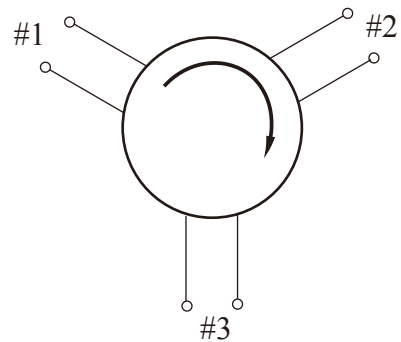


図4 サーキュレータ (時計方向)

#### 4.1 4ポート回路網

次に、完全整合、相反な4ポート回路網について考える。この回路網の散乱行列は次式で与えられる。

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

式(32)の散乱行列がユニタリ性を満たすとして、以下の通り考える。まず、1列目の共役と2列目の積、同じく4列目の共役と3列目の積をとると次式を得る。

$$S_{13}^* S_{23} + S_{14}^* S_{24} = 0 \quad (33a)$$

$$S_{14}^* S_{13} + S_{24}^* S_{23} = 0 \quad (33b)$$

次に、式(33a)に $S_{24}^*$ 、式(33b)に $S_{13}^*$ をそれぞれ掛けて両式を引くと

$$S_{14}^* (|S_{24}|^2 - |S_{13}|^2) = 0 \quad (34)$$

を得る。同様に、1列目の共役と3列目の積、同じく4列目の共役と2列目の積をとると

$$S_{12}^* S_{23} + S_{14}^* S_{34} = 0 \quad (35a)$$

$$S_{14}^* S_{12} + S_{34}^* S_{23} = 0 \quad (35b)$$

となり、式(35a)に $S_{12}$ 、式(35b)に $S_{34}$ をそれぞれ掛けて両式を引くと次式を得る。

$$S_{23} (|S_{12}|^2 - |S_{34}|^2) = 0 \quad (36)$$

式(34)、(36)が満足するには $S_{14} = S_{23} = 0$ が成立すればよい。これは回路網が方向性結合器となることを示している。この条件下で、式(32)の各列の積が1となるユニタリ性より

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (37a)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (37b)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (37c)$$

$$|S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \quad (37d)$$

となり、式(37a)、(37b)と式(37b)、(37d)からそれぞれ次式を得る。

$$|S_{13}| = |S_{24}| \quad (38a)$$

$$|S_{12}| = |S_{34}| \quad (38a)$$

この4ポート回路網に関して更に具体的に検討することにする。いま、ポート3、4の位相の基準面を

$$S_{12} = S_{34} = \alpha \quad (39a)$$

$$S_{13} = \beta e^{j\theta} \quad (39b)$$

$$S_{24} = \beta e^{j\phi} \quad (39c)$$

を満たすように適当に定めるとする。上式で $\alpha$ 、 $\beta$ は実数、 $\theta$ 、 $\phi$ は $S_{13}$ と $S_{24}$ の位相を表している。また、 $\alpha$ と $\beta$ は次式を満たす。

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (39a)$$

いま、式(32)の2列目の共役と3列目の積をとると

$$S_{12}^* S_{13} + S_{24}^* S_{34} = 0 \quad (40)$$

となり、位相を間に次の関係が成り立つ。

$$\theta + \phi = \pi + 2n\pi \quad (41)$$

いま、 $n=0$ として、次の2つの位相関係についてそれぞれの散乱行列を示す。

(i)  $\theta = \phi = \pi/2$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & j\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & j\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

(ii)  $\theta = 0, \phi = \pi$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

(i)は出力位相差が90度、(ii)は0度/180度となっていることが分かる。

#### 5. むすび

以上、 $N$ ポート回路網に対して $S$ パラメタ（散乱パラメタ）の定義を示すと共に、その物理的意味と性質を概説した。更に、無損失回路の散乱行列がユニタリ性を示すことを利用して、3ポートならびに4ポート回路網の特性を示した。

#### 文献

- [1] D. M. Pozar, Microwave Engineering 4<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- [2] R. E. Collin, Foundations for Microwave Engineering 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, Inc., 1992.

#### 著者紹介

河合 正

兵庫県立大学 大学院工学研究科, 准教授,  
kawai@eng.u-hyogo.ac.jp