

高周波計測技術の基礎 －S パラメータの基礎－

Basic High Frequency Measurement techniques

－S parameters－

矢加部 利幸

Toshiyuki YAKABE

マルチポート研究所有限責任事業組合 〒182-0026 調布市小島町 1-1-1
UEC アライアンスセンター322

Multi Port Laboratory Limited Liability Partnership, UEC Alliance Center 322,
1-1-1 Kojimacyo, Chofu-shi, Tokyo 182-0026, Japan

E-mail: yakabe@mail.uec.jp

Abstract

S parameter measurements are fundamental and important techniques not only for qualification of devices and systems but also for high frequency characteristics of materials. Especially understanding the physical meaning of the S parameter and familiarity with the measurement principle of the vector network analyzer are the most important and fundamental for realizing the correct measurement.

In this basic course, at first, we will explain the most important basic analysis “Sinusoidal Steady-state Analysis (Phasor Method),” by this basic analysis, we will be able to define the “Impedance.” Next, we will explain the physical meaning of S parameters.

1. はじめに

自然科学・工学分野の発展に伴い、計測工学および計測技術の役割はますます重要となってきた。特に、高周波化に伴う電気電子計測の分野においては、計測の信頼性が今後の電気電子回路設計・評価向上に大きく依存する。近年、「誤差」から「不確かさ」への計測評価方式の移行と、使用する計測機器の信頼性（トレーサビリティ）、更には計測環境等を定量的に総合評価することにより、計測の信頼評価が飛躍的に向上している。

本基礎講座は電気系の工業高校、高等専門学校や大学で学ぶ基礎電磁気学および基礎電気回路学の受講者を対象に、高周波計測に必須項目である **S パラメータの修得**を目的としている。

S パラメータ計測は、高周波計測だけでなく高周波製品の開発や品質評価においても重要な技術となっている。中でも、S パラメータの物理的な意味を理解するとともに、ベクトルネットワークアナライザ（VNA）の測定原理を理解することは、より正しい測定を実現するうえで大変重要である。

今回の基礎講座では、**正弦波定常状態解析法**（フ

ェーザ法）から出発し、インピーダンスの定義、波（電圧波、電流波、電力波[1]）の概念、測定対象回路への「波の反射」と「波の透過」を通して S パラメータの基礎を解説する。これを基に、今後、スミスチャート、シグナルフローグラフ、さらには 6 ポート型 VNA[2]-[4]の測定原理と VNA による高周波測定に関し、修得されることを期待する。

2. フェーザ法とインピーダンス、アドミタンス

線形時間不変回路（大変重要な前提条件）において、正弦波交流波形（瞬時電圧 $v(t)$ ）を例に展開する。

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad [\text{V}] \quad (1)$$

ここで、 V_m は振幅[V]、 ω は角周波数[rad/s]、 $\omega = 2\pi f$ で π [rad] は円周率、 f [Hz] は周波数[Hz]=[1/s] である。周波数 f の逆数を周期 T [s] と呼ぶ（ $T = 1/f$ ）。また、 t は時刻[s]、 ϕ は初期位相、または単に位相[rad]と呼ばれる。

式(2)に示す**オイラーの公式**を導入する事により、電気電子回路解析が簡明かつ明瞭に記述（フェーザ表記）できるようになる。

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta \quad (\text{複合同順}) \quad (2)$$

ここで、 e は無理数でネピアの数、 j は虚数単位であり、左辺は極形式、右辺は複素数である。

式(1)の瞬時電圧 $v(t)$ は式(2)を用いると次式のように展開できる。

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= \Re[V_m \cos(\omega t + \phi) + jV_m \sin(\omega t + \phi)] \\ &= \Re[V_m e^{j(\omega t + \phi)}] = \Re[V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\Re$ は実部演算子と呼ばれ、 $[\]$ 内の複素数の実数部のみを指定（虚数部を取り除く）し、結果、実数となる。すなわち複素数（仮想世界）から実数（現実世界）への写像である。また $[\]$ 内の複素数

$$V_m e^{j\phi} \equiv V \quad (4)$$

をフェーザ電圧 V と呼び、現実の瞬時電圧 $v(t)$ との区別が重要である。式(3)よりフェーザ電圧 V から瞬時電圧 $v(t)$ への変換はとても容易で

$$v(t) = \Re[V e^{j\omega t}] \quad (5)$$

となる。すなわち、フェーザ電圧 V に $e^{j\omega t}$ （回転フェーザ）を乗じた後、単にその実数部（ $\Re$ パート）を採ればよい。同様に、瞬時電流 $i(t)$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad [A] \quad (6)$$

に対応するフェーザ電流 I は

$$I \equiv I_m e^{j\phi} \quad (7)$$

となる。

このフェーザ（正確には、より広義なラプラス変換）の導入により、インピーダンス（impedance） Z $[\Omega]$ と、その逆数であるアドミタンス（admittance） Y $[S]$ が定義できる。なお Z 、 Y の両者を総称してインミッタンス（immittance）と呼ばれることがある。

$$Z \equiv \frac{V}{I}, \quad Y \equiv \frac{I}{V} \quad (8)$$

ここで、 V はフェーザ電圧、 I はフェーザ電流であり、これらは一般に複素数である。また、使用する線形時間不変回路素子のレジスタ（抵抗）、インダクタ、キャパシタのインミタンス表現が重要となる。レジスタ R $[\Omega]$ （現実）のインピーダンス Z_R $[\Omega]$ （仮想）は

$$v(t) = R \cdot i(t) \quad (9)$$

より

$$V = R \cdot I \equiv Z_R \cdot I \quad (10)$$

すなわち、

$$Z_R = R [\Omega] \quad (11)$$

となる。次にインダクタ L $[H]$ のインピーダンス Z_L $[\Omega]$ は、現実の世界での時間微分はフェーザの世界では $j\omega$ となる（後述する）に注意すると

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (12)$$

より

$$V = L \cdot j\omega I = j\omega L \cdot I \equiv Z_L \cdot I \quad (13)$$

よって

$$Z_L = j\omega L [\Omega] \quad (14)$$

となる。さらに、キャパシタ C $[F]$ のアドミタンス Y_C $[S]$ は

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (15)$$

より

$$I = C \cdot j\omega V = j\omega C \cdot V \equiv Y_C \cdot V \quad (16)$$

すなわち

$$Y_C = j\omega C [S] \quad (17)$$

ここで、現実世界での時間微分演算子 d/dt はフェーザ世界で $j\omega$ となることを示そう。一般に実関数 $x(t)$ とそのフェーザ関数 X の関係は

$$x(t) = \Re[X e^{j\omega t}] \quad (18)$$

となる。また、線形時間不変の条件下で、微分演算子と実部演算子の演算順序を交換が保証（可換律）される。よって、次式のように展開できる。

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \Re[X e^{j\omega t}] = \Re \frac{d}{dt} [X e^{j\omega t}] \\ &= \Re \left[X \frac{d}{dt} e^{j\omega t} \right] = \Re [j\omega X e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (19)$$

これで私たちは正弦波定常状態回路解析に対しフェーザ法を用いることにより、直流回路解析と同様に取り扱うことができる（ただし、複素数の代数演算）技術を獲得した。

3. 伝送線路理論

3.1 伝送線路方程式

電気電子計測において、RF 帯からマイクロ波、ミリ波領域、テラヘルツ波帯等の幅広い高周波領域では、電気回路学等の直流を含む低周波領域解析で用いられている集中定数回路(Lumped Circuits)論では解析できない。これは、電気電子工学の根本原理であるマックスウェルの方程式に対して、対象回路が線形時間不変回路かつ回路寸法が使用周波数の波長に比べて無視できる(集中定数回路)等の厳しい前提条件があるためである。

これに対して、高周波領域での回路解析では集中定数回路論は適用できなくなり、分布定数回路(Distributed Circuits)論が適用される。すなわち、高周波回路では

- ・レジスタンス、インダクタンス、キャパシタンスが空間に連続的に分布し、独立した回路素子として取り扱うことができない回路
- ・波長と比べて長さが無視できない(おおよそ回路寸法の百倍が波長程度)構造を持つ回路
- ・分布定数回路では集中定数回路で用いたキルヒホッフの法則(KVL, KCL)は成立しない。

となる。表1に電気電子回路解析手法の分類を示す。

図1に示す伝送線路に対し、伝送線路上の時刻 t 、位置 x における瞬時高周波電流を $i(x, t)$ 、瞬時高周波電圧を $v(x, t)$ とする。また空間に連続的に分布している単位長さ当たりのレジスタ $R[\Omega/m]$ 、単位長さ当たりのインダクタ $L[H/m]$ 、単位長さ当たりのコンダクタ $G[S/m]$ 、単位長さ当たりのキャパシタ $C[F/m]$ が一樣に分布している。この関係をフェーザ表示すると図2に示すように単位長さ当たりのシリーズインピーダンス $Z[\Omega/m]$ とシャントアドミタンス $Y[S/m]$ は伝送線路の1次定数を呼ばれ、

$$Z = R + j\omega L \quad (20)$$

$$Y = G + j\omega C \quad (21)$$

となる。図3に微小区間の伝送線路等価回路を示す。

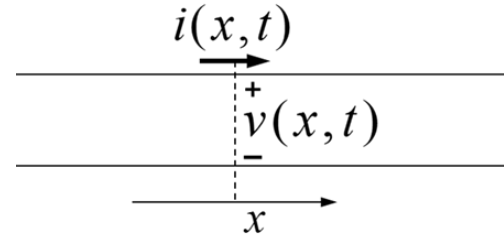


図1. 伝送線路

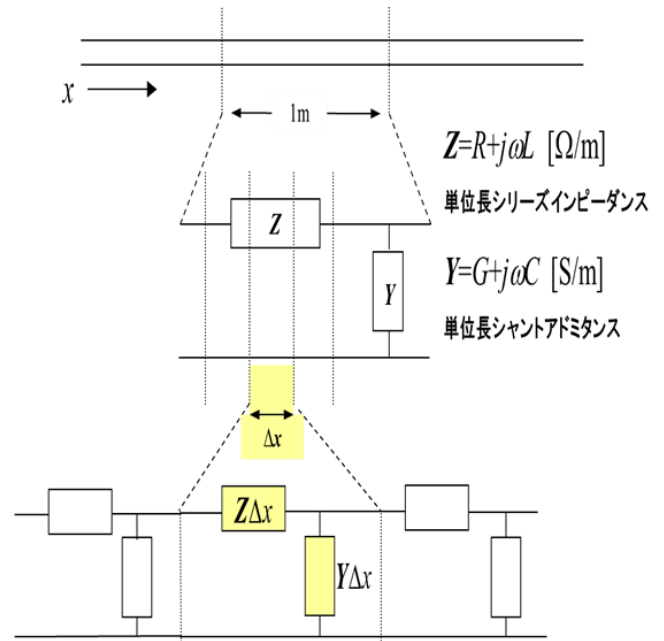


図2. 一樣な伝送線路の梯子型等価回

この微小区間に対してはでは、高周波波長に対しても十分小さいので、集中定数回路として取り扱うことができる。この微小区間 $\Delta x[m]$ に KVL, KCL を用いて整理すると

$$\frac{dV(x)}{dx} = -ZI(x) \quad (22)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = -YV(x) \quad (23)$$

表1 電気電子回路解析手法の分類

回路名称	構造	回路素子例	解析手法
集中定数回路	0次元	R, L, C	電圧・電流 キルヒホッフの法則
分布定数回路	1次元	同軸ケーブル 線状アンテナ	電圧・電流 分布定数回路理論 電界・磁界 マックスウェルの方程式
平面回路	2次元	ストリップ線路 コプレーナ線路	
立体回路	3次元	導波管 光ケーブル	

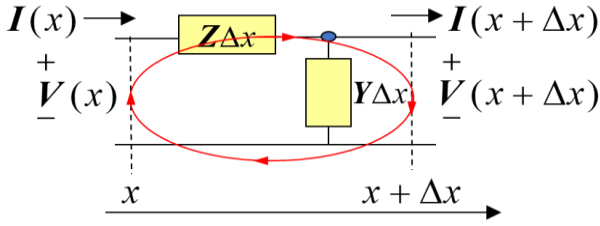


図3. 微小区間での伝送線路等価回路

式(22), (23)は伝送線路方程式と呼ばれ、この二式からフェーザ電圧 $V(x)$ [V]、フェーザ電流 $I(x)$ [A]を求めると

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad (24)$$

$$Z_0 I(x) = Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x} \quad (25)$$

となる。ここで A, B は複素定数、また Z_0 は特性インピーダンスと呼ばれ

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \equiv R_0 + jX_0 \quad (26)$$

となり、また γ は伝搬定数と呼ばれ

$$\gamma \equiv \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \equiv \alpha + j\beta \quad (27)$$

となる。

3.2 伝送線路の入射波と反射波

伝送線路方程式の解(24), (25)を考察する。式(24)の右辺第1項を $V^+(x)$ とおくと

$$V^+(x) = Ae^{-\gamma x} = Ae^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (28)$$

となり、このフェーザ電圧に対応する(正弦波)瞬時電圧 $v^+(x, t)$ は式(5)より

$$\begin{aligned} x^+(x, t) &= \Re[V^+(x)e^{j\omega t}] \\ &= Ae^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。よって、 $V^+(x)$ は x の正方向に進む波であり、(フェーザ)入射電圧波という。一方、式(24)の右辺第2項 $V^-(x)$ は x の負方向に進む(フェーザ)反射電圧波という。同様に式(25)より

$$I(x) = \frac{A}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{B}{Z_0} e^{\gamma x} \equiv I^+(x) + I^-(x) \quad (30)$$

とすると、 $I^+(x)$ は x の正方向に進む波であり、(フェーザ)入射電流波、 $I^-(x)$ は x の負方向に進む(フェーザ)反射電流波という。

3.3 特性インピーダンスと伝搬定数

式(26), (27)で示した特性インピーダンス Z_0 と伝搬定数 $\gamma(= \alpha + j\beta)$ を伝送線路の2次定数という。また、 α を減衰定数、 β を位相定数という。これらを考察する。まず、特性インピーダンス Z_0 は、式(22), (23)より伝送線路上に入射波のみ存在する($B=0$)場合のインピーダンスである。これは、反射の無い無限長伝送線路または伝送線路を特性インピーダンス Z_0 で終端したときに実現できる。次に、伝搬定数の実部である減衰定数 α を考察する。式(28)の入射電圧波 $V^+(x)$ に着目すると、位置 $x=x_1$ と x_2 における $V^+(x)$ の振幅比は

$$\left| \frac{V^+(x_1)}{V^+(x_2)} \right| = \frac{e^{-\alpha x_1}}{e^{-\alpha x_2}} = e^{\alpha(x_2 - x_1)} \quad (31)$$

となる。ここで、距離 $(x_2 - x_1) = 1$ m(単位長)あたりの振幅比から減衰定数を求めることができる。

$$\alpha = \log_e \left| \frac{V^+(x_1)}{V^+(x_2)} \right| \equiv \alpha_{Np} \text{ [Np/m]} \quad (32)$$

これは、ネーパー(Np)で表した単位長当たりの減衰量であり、また、デシベル(dB)で表した単位長当たりの減衰量 α_{dB} は

$$\alpha_{dB} \equiv 10 \log_{10} \left| \frac{V^+(x_1)}{V^+(x_2)} \right|^2 \text{ [dB/m]} \quad (33)$$

となり、1 Np は約 8.686 dB に、1 dB は約 0.115 Np と換算できる。最後に位相定数 β を考察する。式(29)の瞬時入射電圧波は時間とともに x の正方向に伝搬し、 x [m]進むと βx [rad]位相が遅れる。他に、単位長当たりの遅れ位相角を位相定数といえるし、遅れ位相角は 2π [rad]となる距離を1波長(λ [m])ともいえる。すなわち

$$\beta \lambda = 2\pi \quad \therefore \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ [rad/m]} \quad (34)$$

3.4 伝送線路行列とインピーダンス変換

図4に示す伝送線路に、前節で示した伝送線路方程式の解(24), (25)を適用する。

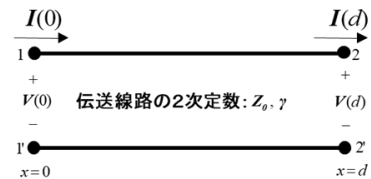


図4. 伝送線路

図の位置 $x=0$ における端子条件 $\mathbf{V}(0)=\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(0)=\mathbf{A}-\mathbf{B}$ より

$$\mathbf{A}=\frac{\mathbf{V}(0)+\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(0)}{2}, \quad \mathbf{B}=\frac{\mathbf{V}(0)-\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(0)}{2}$$

また位置 $x=d$ における端子条件は

$$\mathbf{V}(d)=\frac{\mathbf{V}(0)+\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(0)}{2}e^{-\gamma d}+\frac{\mathbf{V}(0)-\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(0)}{2}e^{\gamma d}$$

$$\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(d)=\frac{\mathbf{V}(0)+\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(0)}{2}e^{-\gamma d}-\frac{\mathbf{V}(0)-\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(0)}{2}e^{\gamma d}$$

となる。これらの式に数学公式

$$\cosh \gamma d = \frac{e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}}{2}, \quad \sinh \gamma d = \frac{e^{\gamma d} - e^{-\gamma d}}{2},$$

$$\cosh^2 \gamma d - \sinh^2 \gamma d = 1$$

を用いて整理すると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}(0) \\ \mathbf{I}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma d & \mathbf{Z}_0 \sinh \gamma d \\ \frac{1}{\mathbf{Z}_0} \sinh \gamma d & \cosh \gamma d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}(d) \\ \mathbf{I}(d) \end{pmatrix} \quad (35)$$

となる。これを伝送線路行列という。

次に、図4の位置 $x=d$ をインピーダンス $\mathbf{Z}_L$ で終端したとき(図5)、式(35)の伝送線路行列より $x=0$ からみたインピーダンス $\mathbf{Z}_i$ は次式となる。

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{V}(0)}{\mathbf{I}(0)} = \mathbf{Z}_0 \frac{\mathbf{Z}_L \cosh \gamma d + \mathbf{Z}_0 \sinh \gamma d}{\mathbf{Z}_0 \cosh \gamma d + \mathbf{Z}_L \sinh \gamma d} \quad (36)$$

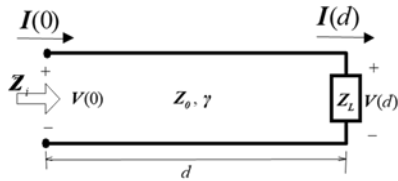


図5. インピーダンス $\mathbf{Z}_L$ で終端した伝送線路

3.5 無損失伝送線路

多くの伝送線路回路解析において、一般に回路寸法と使用波長寸法との関係で、伝送線路1次定数の式(20),(21)において $R \ll \omega L$, $G \ll \omega C$ (マイクロ波近似ともいわれる)を適用できることが多い。シリーズ抵抗 $R=0$ 、シャントコンダクタンス $G=0$ とみなせる場合を**無損失伝送線路**と呼び、頻繁にこの条件を使用する。また伝送線路2次定数の特性インピーダンス $\mathbf{Z}_0$ は実数 ($\mathbf{Z}_0$)、

$$\mathbf{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega] \quad (37)$$

となり、一方と伝搬定数 $\gamma(\alpha + j\beta)$ では $\alpha=0$ 、すなわち $\gamma = j\beta$ (純虚数) となり、位相定数 β は

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{f}{v_p} = 2\pi \sqrt{LC} \quad [\text{rad/m}] \quad (38)$$

となる。ここで v_p は伝送線路を伝搬する高周波の速度 (位相速度) と呼ばれ、

$$v_p = f\lambda = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad [\text{m/s}] \quad (39)$$

また単位長当たりのインダクタンス L とキャパシタンス C は

$$L = \frac{\mathbf{Z}_0}{v_p} \quad [\text{H/m}], \quad C = \frac{1}{v_p \mathbf{Z}_0} \quad [\text{F/m}] \quad (40)$$

となる。さらに、式(36)のインピーダンス $\mathbf{Z}_i$ は数学公式

$$\cosh j\beta d = \cos \beta d, \quad \sinh j\beta d = j \sin \beta d$$

を用いて整理すると

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_0 \frac{\mathbf{Z}_L \cos \beta d + j\mathbf{Z}_0 \sin \beta d}{\mathbf{Z}_0 \cos \beta d + j\mathbf{Z}_L \sin \beta d} \quad (41)$$

特に図5での**無損失短絡回路** ($\gamma = j\beta$, $\mathbf{V}(0)=0$) では $\mathbf{Z}_i = j\mathbf{Z}_0 \tan \beta d$ となり、一方、**無損失開放回路** ($\gamma = j\beta$, $\mathbf{I}(0)=0$) では $\mathbf{Z}_i = -j\mathbf{Z}_0 \cot \beta d$ となる。無損失短絡・開放線路の入力インピーダンスの関係を図6に示す。

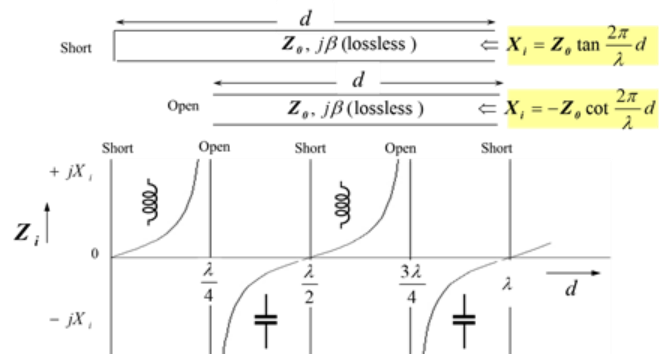


図6. 無損失短絡・開放線路の入力インピーダンス

3.6 無損失伝送線路の入射波と反射波

図7に示す無損失伝送線路の(フェーザ)電圧 $\mathbf{V}$ 、(フェーザ)電流 $\mathbf{I}$ は、次式に示すように、いずれも電圧波の合成で表すことができる。

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x) \quad [\text{V}] \quad (42)$$

$$I(x) = \frac{V^+(x)}{Z_0} - \frac{V^-(x)}{Z_0} \quad [\text{A}] \quad (43)$$

ここで

$$V^+(x) = V^+(0)e^{-j\beta x}$$

は x 軸の正方向に進む入射電圧波、また

$$V^-(x) = V^-(0)e^{j\beta x}$$

は x 軸の負方向に進む反射電圧波である。よって点 x の入力インピーダンス $Z_i(x)$ は

$$Z_i(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \frac{V^+(x) + V^-(x)}{V^+(x) - V^-(x)} \quad [\Omega] \quad (44)$$

となる。

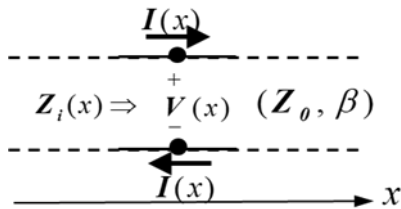


図 7. 無損失伝送線路

次に、大変重要な入射波と反射波の正規化を行う。式(42), (43)の電圧 V [V]、電流 I [A]を正規化し、共通単位 $[\sqrt{W}]$ を持つ入射波と反射波を次式のように定義し、それぞれ正規化電圧 v 、電流 i といい、同じ単位となる。

$$v \equiv \frac{V(x)}{\sqrt{Z_0}} = \frac{V^+(x)}{\sqrt{Z_0}} + \frac{V^-(x)}{\sqrt{Z_0}} \quad [\sqrt{W}] \quad (45)$$

$$i \equiv I(x)\sqrt{Z_0} = \frac{V^+(x)}{\sqrt{Z_0}} - \frac{V^-(x)}{\sqrt{Z_0}} \quad [\sqrt{W}] \quad (46)$$

また、右边第 1 項と第 2 項を

$$a \equiv \frac{V^+(x)}{\sqrt{Z_0}}, \quad b \equiv \frac{V^-(x)}{\sqrt{Z_0}} \quad [\sqrt{W}] \quad (47)$$

と定義し、それぞれ正規化 (フェーザ) 入射 (電圧) 波、正規化 (フェーザ) 反射 (電圧) 波と呼ぶ。入射波、反射波の絶対値の 2 乗はそれぞれ入射波電力、反射波電力 $[W]$ を表す。よって

$$v = a + b \quad [\sqrt{W}], \quad i = a - b \quad [\sqrt{W}] \quad (48)$$

となる。さらに、正規化インピーダンス z と電圧反射係数 Γ を以下のように定義する。

$$z(x) \equiv \frac{v}{i} = \frac{Z_i(x)}{Z_0} \quad (49)$$

$$\Gamma(x) \equiv \frac{b}{a} = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} \quad (50)$$

これより、 z と Γ の相互関係は

$$z(x) = \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)}, \quad \Gamma(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1} \quad (51)$$

となる。

3.7 無損失伝送線路の電圧反射係数と電圧定在波

図 8 に示す無損失線路において、式(42), (49)より

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x) = V^+(x)(1 + \Gamma(x)) \quad (52)$$

$$\Gamma(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} = \frac{V^-(0)e^{j\beta x}}{V^+(0)e^{-j\beta x}} = \Gamma(0)e^{j2\beta x} \quad (53)$$

となる。よって

$$\Gamma(x) = \Gamma(0)e^{j2\beta x}, \quad \Gamma(0) = \Gamma(x)e^{-j2\beta x} \quad (54)$$

と表すことができる。

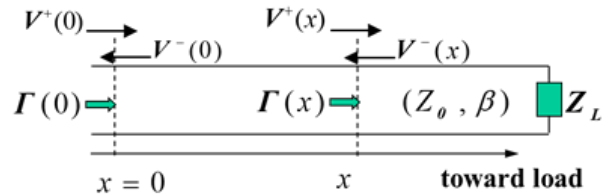


図 8. 負荷 Z_L で終端した無損失伝送線路

式(54)の関係は、単位円の複素平面で表すと図 9 となる。

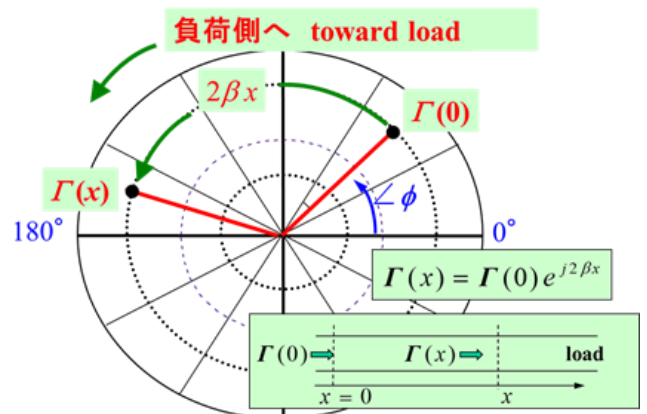


図 9. 複素平面上での反射係数 Γ

次に、無損失伝送線路上での入射波と反射波の関係を考察する。式(52)の大きさ（絶対値）は

$$|V(x)| = |V^+(x)| |1 + \Gamma(x)| = |V^+(0)| |1 + \Gamma(0)e^{j2\beta x}|$$

また

$$|V^+(x)| = |V^+(0)|, \Gamma(0) = |\Gamma(0)|e^{j\phi}, |\Gamma(0)| = |\Gamma|, \theta(x) = \phi + 2\beta x$$

であることを考慮すると

$$|V(x)| = |V^+(0)| |1 + \Gamma e^{j\theta(x)}|$$

$$= |V^+(0)| \sqrt{1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos \theta(x)}$$

となる。ここで、 $|V^+(0)|$ に対する $|V(x)|$ の比を電圧定在波（Voltage Standing Wave : VSW）といい、

$$\text{VSW} = \frac{|V(x)|}{|V^+(0)|} = \sqrt{1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos \theta(x)} \quad (55)$$

となる。同様に、電流に対して電流定在波（Current Standing Wave : CSW）といい、

$$\text{CSW} = \frac{|I(x)|}{|I^+(0)|} = \sqrt{1 + |\Gamma|^2 - 2|\Gamma| \cos \theta(x)} \quad (56)$$

という。一般に、電圧定在波（VSW）を単に定在波（Standing Wave）という。また、VSW と CSW は次式のように書くこともでき、

$$\text{VSW} = |1 + \Gamma|, \quad \text{CSW} = |1 - \Gamma| \quad (57)$$

この関係を複素平面で表すと図 10 となる。なお、この図は Crank diagram と呼ばれる。

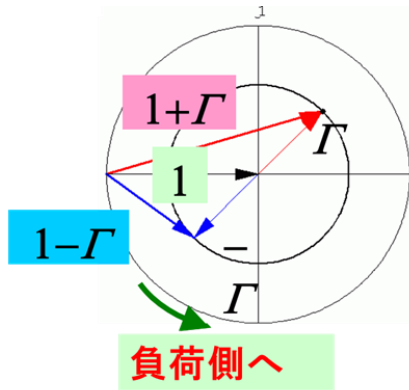


図 10. 複素平面上での VSW と CSW の関係

また、Crank diagram と VSW の関係を図 11 に示す。図の VSW 最大点 $\text{VSW}_{\max}$ と最小点 $\text{VSW}_{\min}$ の比を電圧定在波比（VSWR）といい次式となる。

$$\text{VSWR} = \frac{\text{VSW}_{\max}}{\text{VSW}_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (58)$$

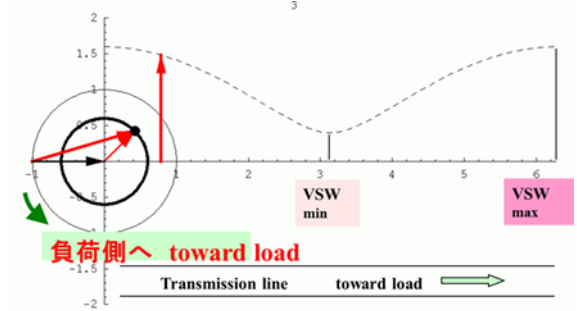


図 11. Crank diagram vs. VSW

次に、 $\text{VSW}_{\max}$ および $\text{VSW}_{\min}$ の正規化インピーダンス z と VSWR の関係を考察する。式(51)より

$$z(x) = \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)} \equiv r + jx \quad (59)$$

$\text{VSW}_{\max}$ の位置における $z(x)$ は実数で VSWR に等しく $\Gamma(x) = |\Gamma|$ （正の実数）となるので

$$z(x) = r = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \text{VSWR} \geq 1 \quad (60)$$

一方、 $\text{VSW}_{\min}$ の位置における $z(x)$ は実数で $1/\text{VSWR}$ に等しく $\Gamma(x) = -|\Gamma|$ （負の実数）なので

$$z(x) = r = \frac{1 - |\Gamma|}{1 + |\Gamma|} = \frac{1}{\text{VSWR}} \leq 1 \quad (61)$$

となる（図 12 参照）。

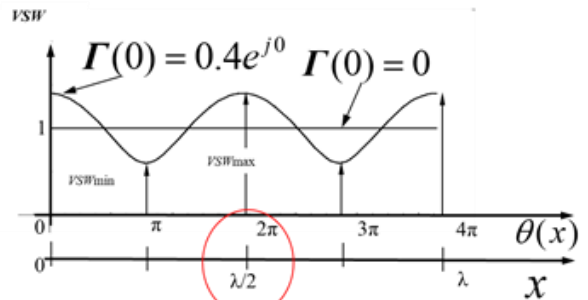


図 12. 電圧定在波と反射係数の関係

3.8 入射波と反射波、進行波と定在波

伝送線路上の（電圧）波の振舞いについて考察する。無損失伝送線路（ $\gamma = j\beta$ ）上でのフェーザ電圧 $V(x)$ は式(24)より

$$V(x) = Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x} \quad (62)$$

となる。既に述べたように、右辺第 1 項 $Ae^{-j\beta x}$ を電圧入射波 $V^+(x)$ 、右辺第 2 項 $Be^{j\beta x}$ を電圧反射波 $V^-(x)$ と呼ばれ、電圧反射係数は

$$\Gamma(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)}, \quad \Gamma(0) \equiv |\Gamma|e^{j\phi} = \frac{V^-(0)}{V^+(0)} = \frac{B}{A}$$

となる。よって、 $A=V^+(0)$ で正規化した電圧波を $\overline{V}(x)$ とすると

$$\overline{V}(x) \equiv \frac{V(x)}{V^+(0)} = e^{-j\beta x} + \Gamma(0)e^{j\beta x} \quad (63)$$

となる。この式は、伝送路には互いに反対方向に伝搬する二つの波（右辺第1項は入射波、第2項は反射波）が存在していることをフェーザ表示で示している。式(5)を用いて瞬時電圧 $\overline{v}(x,t)$ へ変換すると

$$\begin{aligned} \overline{v}(x,t) &= \Re[\overline{V}(x)e^{j\omega t}] \\ &= \cos(\omega t - \beta x) + |\Gamma| \cos(\omega t + \phi + \beta x) \end{aligned} \quad (64)$$

となり、右辺第1項は（瞬時）入射波、第2項は（瞬時）反射波である。式(64)に示す入射波と反射波の合成波形は場所に依存せず一定となり、（電圧）定在波と呼ばれ、その様子を図13に示す。

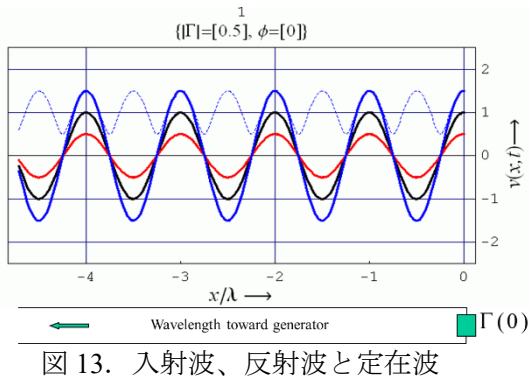


図13. 入射波、反射波と定在波

4. Sパラメータ

4.1 Sパラメータと反射損失、挿入損失

伝送線路に挿入された線形nポート回路の各ポートに出入りする波（正確には式(47)に示す正規化フェーザ入射電圧波 a 、正規化フェーザ反射電圧波 b で、一般に入射波、反射波と呼ばれ、 $[\sqrt{W}]$ の単位を持つ）の大きさと位相に着目して、その回路の特性を記述するパラメータをSパラメータ（Scattering parameter：散乱パラメータ）という。

図14に示す線形nポート回路において各ポートに出入りする波とSパラメータは以下の行列で表す。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (65)$$

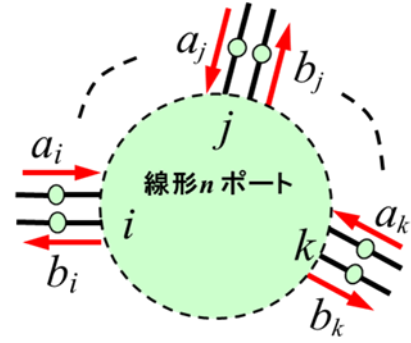


図14. 線形nポート回路と出入りする波

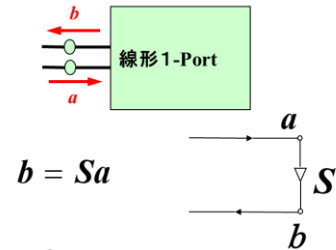
ここでSパラメータの行列要素 S_{ij} は

$$S_{ij} = \frac{b_i}{a_j} \quad (a_k = 0, k \neq j) \quad (66)$$

であり、一つのポート j のみに入射波を加え、他のすべてのポートは整合終端（ $a_k = 0$ ）されていることが重要である。ここで S_{ij} は入力ポート j から出力

ポート i への伝達関数であり、また S_{jj} はポート j の反射係数である。

具体的に1ポート回路を図15に、2ポート回路のSパラメータ図16にそれぞれ示す。



$$S = \frac{b}{a} \equiv \Gamma : \text{電圧反射係数}$$

図15. 1ポート回路のSパラメータ

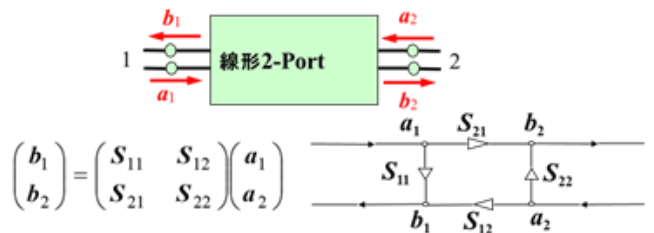


図16. 2ポート回路のSパラメータ

なお図中にはシグナルフローグラフ[5]-[7]を導入している。また2ポート回路のSパラメータ行列要素

の名称と条件を表2に示す。

表2. 2ポートSパラメータ行列要素

ポート2整合	ポート1整合
$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right _{a_2=0}$ 入力反射係数	$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right _{a_1=0}$ 逆方向伝送係数
$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right _{a_2=0}$ 順方向伝送係数	$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right _{a_1=0}$ 出力反射係数

次に、nポート回路の反射損失（Return loss：RL）と挿入損失（Insertion loss：IL）の定義を示す。ポート j からの反射波に対する減衰量を反射損失といい

$$RL \equiv -10 \log_{10} |S_{jj}|^2 = 20 \log_{10} \frac{1}{|S_{jj}|} \quad (\text{dB}) \quad (66)$$

と、一方、入力ポート j と出力ポート i の間の減衰量を挿入損失といい

$$IL \equiv -10 \log_{10} |S_{ij}|^2 = 20 \log_{10} \frac{1}{|S_{ij}|} \quad (\text{dB}) \quad (67)$$

と定義する。両者ともデシベル(dB)で表し、かつ正の実数値である。

4.2 伝送線路の伝送電力

式(47)で示し、前節でも述べたように、正規化したフェーザ入射電圧波（入射波） $\mathbf{a}$ とフェーザ反射電圧波（反射波） $\mathbf{b}$ は入射電圧波 $\mathbf{V}^+(x)$ と反射電圧波 $\mathbf{V}^-(x)$ の関係は特性インピーダンス $\mathbf{Z}_0$ を介して

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{V}^+(x)}{\sqrt{\mathbf{Z}_0}}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{V}^-(x)}{\sqrt{\mathbf{Z}_0}} \quad [\sqrt{\mathbf{W}}]$$

と表すことができる。よって、式(42), (43)で示した伝送線路上の無損失伝送線路の（フェーザ）電圧 $\mathbf{V}(x)$ 、（フェーザ）電流 $\mathbf{I}(x)$ と入射波 $\mathbf{a}$ 、反射波 $\mathbf{b}$ の関係は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}(x) \\ \mathbf{I}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{Z}_0} & \sqrt{\mathbf{Z}_0} \\ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Z}_0}} & -\frac{1}{\sqrt{\mathbf{Z}_0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (68)$$

となる。

無損失伝送線路上の伝送（平均）電力 P は瞬時電力 $p(t)$ の平均より

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v(t)i(t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Re_e[\mathbf{V}(x)e^{j\omega t}] \Re_e[\mathbf{I}(x)e^{j\omega t}] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[\frac{\mathbf{V}(x)e^{j\omega t} + \mathbf{V}^*(x)e^{-j\omega t}}{2} \right] \left[\frac{\mathbf{I}(x)e^{j\omega t} + \mathbf{I}^*(x)e^{-j\omega t}}{2} \right] dt \\ &= \frac{\mathbf{V}(x)\mathbf{I}^*(x) + \mathbf{V}^*(x)\mathbf{I}(x)}{4} = \frac{1}{2} \Re_e[\mathbf{V}(x)\mathbf{I}^*(x)] \\ &= \frac{1}{2} \Re_e \left[\frac{\mathbf{Z}_0}{\mathbf{Z}_0^*} (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a}^* - \mathbf{b}^*) \right] \end{aligned} \quad (69)$$

となる。ここで、*は共役複素数を表し、損失のある伝送線路における電圧波の絶対値の2乗は伝送電力と直接関係付けられていないが、 $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0^*$ すなわち無損失線路（ $\mathbf{Z}_0 = Z_0$ ：実数）のときのみ

$$P = \frac{1}{2} (|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2) \quad (70)$$

となる。

これまで述べてきた入射電圧波 $\mathbf{a}$ 、反射電圧波 $\mathbf{b}$ は、式(47)の通り電圧（ $\mathbf{V}^+(x)$ 、 $\mathbf{V}^-(x)$ ）に基づいて定義されていたが、1965年、電力に基づいた入射電力波 $\mathbf{a}$ 、反射電力波 $\mathbf{b}$ が新たに定義され（黒川の電力波[]）、注目されている。電圧ベースと電力ベースによる異なった定義であるのにも拘らず、同じ $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を使用し混乱することがあるので充分注意し、確り区別して使用する必要がある。入射電力波 $\mathbf{a}$ 、反射電力波 $\mathbf{b}$ は式(47)とは異なり

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{V}(x) + \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}(x)}{2\sqrt{\Re_e \mathbf{Z}_0}}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{V}(x) - \mathbf{Z}_0^* \mathbf{I}(x)}{2\sqrt{\Re_e \mathbf{Z}_0}} \quad (71)$$

と定義されている。また、式(71)より $\mathbf{V}(x)$ 、 $\mathbf{I}(x)$ は

$$\mathbf{V}(x) = \frac{\mathbf{Z}_0^* \mathbf{a} + \mathbf{Z}_0 \mathbf{b}}{\sqrt{\Re_e \mathbf{Z}_0}}, \quad \mathbf{I}(x) = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\sqrt{\Re_e \mathbf{Z}_0}} \quad (72)$$

となっていることにも注意が必要である。

式(47)と式(71)で示すように、波 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は異なっているが、同じ単位 $[\sqrt{\mathbf{W}}]$ である。

入射電力波 $\mathbf{a}$ 、反射電力波 $\mathbf{b}$ の導入の最大の特長であり利点の一つは、伝送（平均）電力 P が伝送線路に損失の有り、無しに関わらず常に

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \Re_e[\mathbf{V}(x)\mathbf{I}^*(x)] \\ &= \frac{1}{4} [\mathbf{V}(x)\mathbf{I}^*(x) + \mathbf{V}^*(x)\mathbf{I}(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{Z_0^* a + Z_0 b}{\sqrt{\Re Z_0}} \right) \left(\frac{a^* - b^*}{\sqrt{\Re Z_0}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{Z_0 a^* + Z_0^* b^*}{\sqrt{\Re Z_0}} \right) \left(\frac{a - b}{\sqrt{\Re Z_0}} \right) \right] \\
&= \frac{(Z_0 + Z_0^*)(|a|^2 - |b|^2)}{4\Re Z_0} \\
&= \frac{1}{2} (|a|^2 - |b|^2) \quad (73)
\end{aligned}$$

となり、常に入射電力 $|a|^2$ と反射電力 $|b|^2$ の差の半分となる。

4.2 電圧反射係数 Γ_v と電力反射係数 Γ_p の関係

負荷インピーダンス Z_L で終端された伝送線の負荷端 $x=d$ の電圧反射係数 Γ_v と Z_L は(図5、15参照)式(50)より

$$\Gamma_v = \frac{V^-(d)}{V^+(d)}, \quad Z_L = \frac{V(d)}{I(d)} \quad (74)$$

となる。一方、式(24), (25)より

$$V(d) = V^+(d) + V^-(d) \quad (75)$$

$$Z_0 I(d) = V^+(d) - V^-(d) \quad (76)$$

と表すことができる。式(24), (75), (76)より

$$\Gamma_v = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (77)$$

となる。一方、電力反射係数 Γ_p は式(71)より

$$\Gamma_p = \frac{Z_L - Z_0^*}{Z_L + Z_0^*} \quad (78)$$

となる。ここで、電圧反射係数 Γ_v と電力反射係数 Γ_p の関係を考察する。

- ・電圧反射係数の定義より、負荷インピーダンスが特性インピーダンスに等しいとき、電圧反射波が生じない。これをインピーダンス整合という。

- ・線路損失があり、特性インピーダンスが複素数のとき、特性インピーダンスと共役な複素負荷インピーダンスにより、負荷に供給される電力は最大となる。これを共役インピーダンス整合という。

- ・共役インピーダンス整合では、負荷に最大電力が供給されるが、電圧反射係数は零にならない。したがって、正規化電圧入射波、正規化電圧反射波は伝送電

力と正しく関係づけられていない。

なお、無損失伝送線路では特性インピーダンス Z_0 が実数 Z_0 となるので、電圧反射係数 Γ_v と電力反射係数 Γ_p は等しくなる。

5. まとめ

本基礎講座では、正弦波定常状態解析法（フェーザ法）から出発し、インピーダンスの定義、波の概念、測定対象回路への「波の反射」と「波の透過」を通してSパラメータの基礎を解説した。これを基に、今後、Sパラメータ応用、スミスチャート、シグナルフローグラフ、さらには6ポート型VNA[2]-[4]の測定原理とVNAによる高周波測定に関し、修得されることを期待する。また、Sパラメータを解説した文献[8]-[9]を、また関連する名著[10]-[12]を推薦する。

謝辞: 電気通信大学大学院で在職中講義した「伝送工学特論」資料内容の一部に基づいている。当該資料や講義内容に関し多大なるご助力ご支援を賜りました電気通信大学名誉教授の矢部初男先生に甚大なる謝辞を表します。

文 献

- [1] K. Kurokawa, "Power waves and the scattering matrix," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 13, pp. 194-202, Mar. 1965.
- [2] T. Yakabe, *et al.*, "Complete calibration of a six-port reflectometer with one sliding load and one short," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, pp. 2035-2039, Nov. 1994.
- [3] T. Yakabe, *et al.*, "Six-port based wave correlator with application to beam direction finding," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 50, no. 2, pp. 377-380, Dec. 2001.
- [4] T. Yakabe, *et al.*, "Evaluation of prototype MMIC six-port wave correlator based VNA," *2010 Asia-Pacific Radio Science Conference*, p. AB-3, Sep. 2010.
- [5] S. J. Mason, "Feedback theory-Some properties of signal flow graphs", *Proceedings of the IRE*, vol.41, pp.1144-1156, September, 1953.
- [6] S. J. Mason, "Feedback theory-Further properties of signal flow graphs", *Proceedings of the IRE*, vol.44, pp. 920-926 ; July, 1956.
- [7] J. K. Hunton, "Analysis of Microwave Measurement. Techniques by Means of Signal Flow Graphs", *IRE Trans. on MTT*, vol. 8., pp. 206-212, March, 1960.
- [8] 天川修平, "Sパラメータ特論 [I]", 電子情報通信学会誌 Vol.100, No. 5, pp. 381-386, 2017
- [9] 天川修平, "Sパラメータ特論 [II]", 電子情報通信学会誌 Vol.100, No. 6, pp. 511-516, 2017
- [10] Charles A. Desoer & Ernest S. Kuh, "Basic Circuit Theory", McGraw-Hill, ISBN 07-016570-0
- [11] David M. Pozar, "Microwave Engineering (First Edition)", Addison-Wesley, ISBN 0-201-50418-9
- [12] 廣瀬明, "電気電子計測", 数理工学社, ISBN 978-4-86481-025-8