初学者のためのマイクロ波工学入門Ⅱ
－マイクロ波回路と電磁界－

古神 義則, 小林 禧夫*

宇都宮大学 工学部, *埼玉大学 工学部
栃木県宇都宮市陽東 7-1-2, *埼玉県さいたま市桜区下大久保 255
kogami@cc.utsunomiya-u.ac.jp

あらまし
マイクロ波回路内では、電界と磁界の相互作用によって電気信号が伝搬していくが、その様子をイメージすることは、特に初学者にとっては簡単でなく、マイクロ波工学を習得する際の高いハードルとなっている。本講座では、初学者がマイクロ波回路の基本的な考え方を理解できるよう、各種伝送線路や共振器などのマイクロ波受動回路内の電磁界分布および伝搬の様子を視覚的に示した上で、どのように等価回路に表示できるかについて解説する。

1. まえがき

2. マイクロ波伝搬の様子

電波は電界と磁界の相互作用により伝搬していくが、その様子は伝送線路の構造や周波数によって異なる。伝送路内の電磁界分布の様子、すなわち伝搬のしかたを指して伝送モードと呼ぶが、本章では代表的ないくつかのマイクロ波線路について、最も基本的な伝送モードの電磁界を示し、マイクロ波伝搬の様子をイメージする。

2-1 平面波

伝送路を取り扱う前に、まず最も基本的な電波伝搬である平面波をとりあげる。一般に平面波とは、波の進行方向に垂直な面内に電磁界が振動し、その面内では位相および振幅が一様、すなわち振動のタイミングも大きさも揃っている波のことを指す。図 1 に、正弦振動の平面波が一方向に伝搬する場合（進行波）の電磁界分布を示す。伝搬方向をz方向に取ると、電界と磁界はx-y面内に存在し、それらは互いに直交する。図 1 では、電界の振動方向をx方向、磁界をy方向にとり、それぞれの成分をE_xおよびH_yとする。E_xとH_yの向きは、単に直交するだけでなく、図中に示す様に右ねじの法則にも従う。すなわち、「E_xからH_yの向きに右ねじを回すと、その進む方向が波の進行方向に一致する」という法則が任意の点で成り立つ。平面波が何故このような電磁界を持つかについては、次章で改めて解説する。

図 2 に、E_xとH_yの分布が時間とともにどの様に変化していくかを示す。ここで、Tは正弦振動の周期[sec]を示す。E_xおよびH_yの最大となる位置に注目すると、その位置は時間の経過とともにz方向に移動している。移動距離は、1/4 周期の間に 1/4 波長、すなわち 1 周期で 1 波長分である。また、E_xとH_yは同相である。

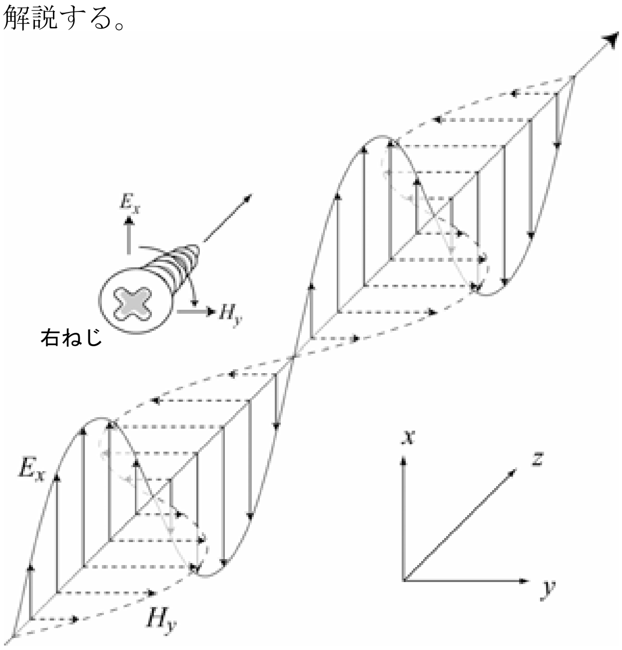


図 1 平面波の電磁界

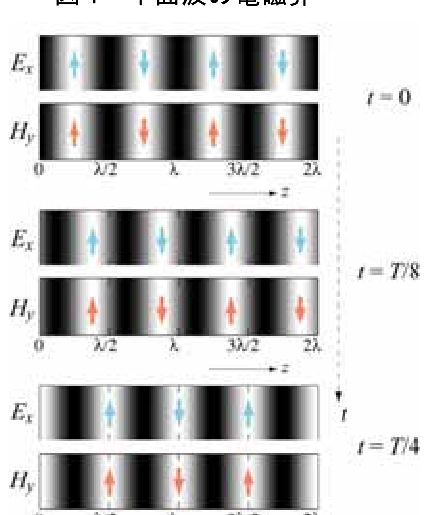


図 2 平面波電磁界の時間的変化

次に、ある方向に進む波（前進波）とその方向から戻ってくる波（後進波）が同時に存在する場合を考える。具体的には、平面波の進行方向に対して垂直に反射板を置き、全反射させる場合を想定する。前述の「E_xからH_yの向きに右ねじを回すと、その進む方向が波の進行方向に一致する」という法則は、前進波にも後進波にも成立する。従って、両者のE_xが同じ方向を向き強めあうときには、H_yは互いに逆向きとなり弱めあう。そして、どの程度強めあうか、あるいは弱めあうかは反射板からの距離に依存する。詳細は次章に述べるが、その結果、電磁界分布は図 3 の様になる。E_xが強めあい振幅が最大となる位置では、H_yの振幅は最小となる。E_xが最大となる位置と、H_yが最大となるz方向の位置は動かず、両者は 1/4 波長、すなわち位相にして 90 度だけ空間的にずれる。この様な現象を定在波と呼ぶ。

図 4 は、定在波の電磁界が時間と共にどの様に変化するかを示す。図中、白い部分が界強度が大きいことを示す。電界強度が最大のときには、磁界強度が零であり、両者の間には時間的にも 90 度の位相差があることがわかる。

以上のように、進行波の場合と定在波の場合では、電磁界の空間的・時間的位相関係は全く異なる。

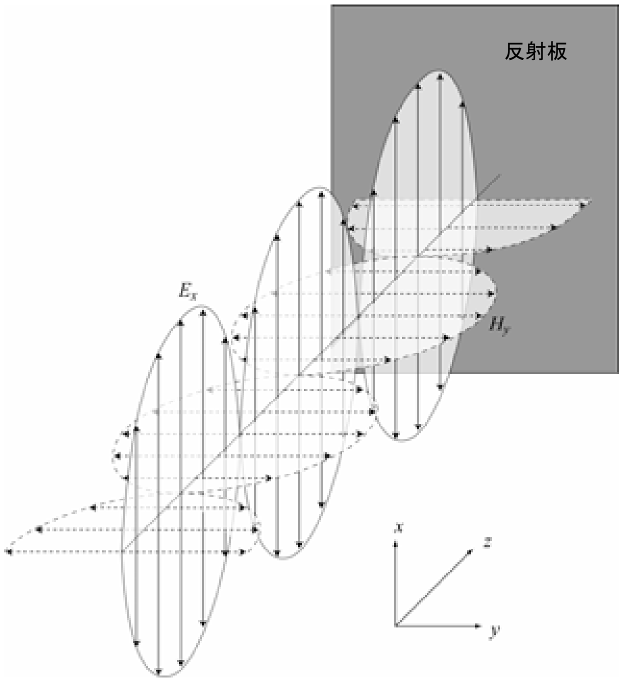


図 3　前進する平面波と後進する平面波の合成

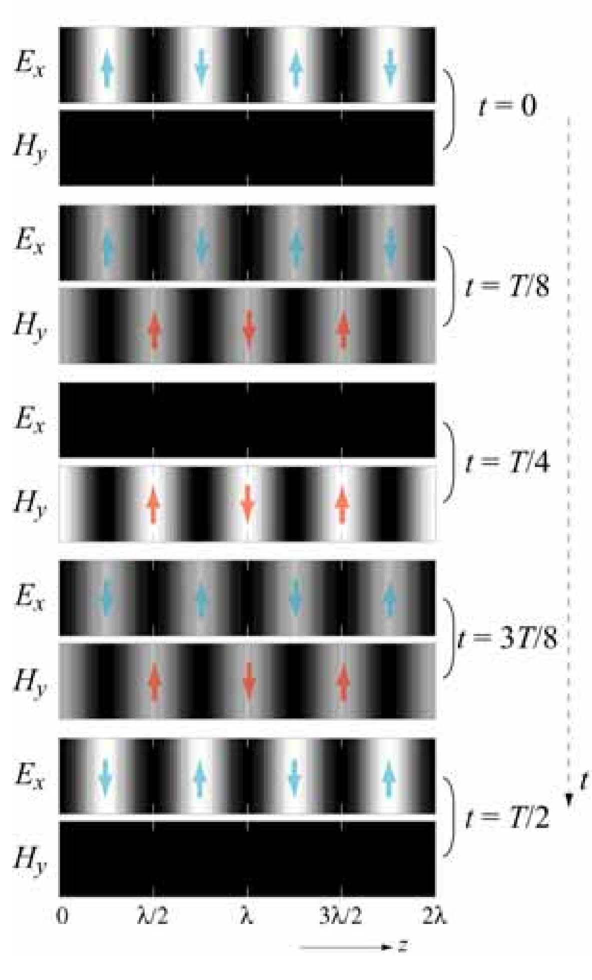


図 4　平面波が反射板により全反射したときの定在波分布（右端が反射板の位置）

2-2　同軸線路

同軸線路の伝送モードを考える前に、平行板線路を導入すると、平面波に対する考察からの接続がたやすい。図 5 上に平行板線路の構造を示す。この基本モードは平行平板に垂直な電界E_xと平行な磁界H_yだけをもち、両者共に平板間の領域内では一様である。すなわち平板間に限れば平面波と同一の電磁界となる。

この平行板線路を図 5 に示すように、徐々に円筒状に折り曲げて丸めたものが、同軸線路に

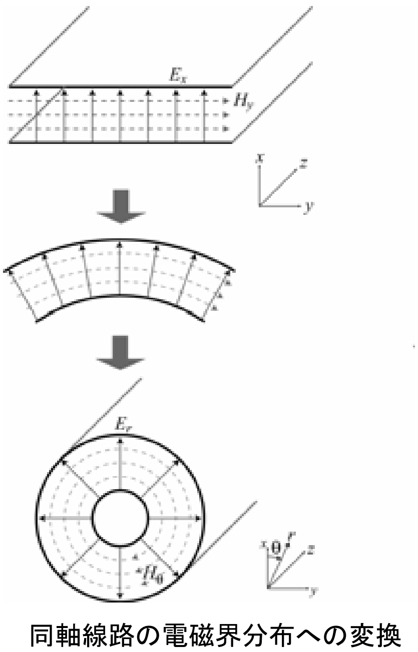


図 5　同軸線路の電磁界分布への変換

なると考えることができる。同軸線路の基本モードの電磁界分布を、改めて図６に示す。

伝送モードは、半径方向の電界E_rとそれに直交する周方向の磁界H_θにのみ構成され、それらの大きさおよび位相はxy断面内で一様となる。この様に、平面波と同じく断面内の電磁界成分のみを持つ伝送モードのことをTEM（Transverse Electric and Magnetic）モードと呼ぶ。

線路内の伝送モードも、進行波として一方向に伝搬するときと、定在波が立つときでは、電磁界の時間的・空間的位相関係が異なる。進行波の場合は、図６に示す様にE_rとH_θは同相でz方向に進み、定在波がたつ場合は、E_rとH_θは時間的・空間的に90度の位相差をもつ。

$\lambda/2$あるいは$\lambda/4$の長さの伝送線路で構成される共振器は、線路内に定在波が生じる典型的な場合である。図７(a)は、$\lambda/2$の長さの同軸線路の両端を開放して構成した$\lambda/2$同軸共振器の共振電磁界を示す。開放部では電界E_rの振幅が最大となり、中央部では磁界H_θの振幅が最大となる。これに伴って、開放部では中心導体と外導体の間の電圧が最大となり、中央部では両導体面上を線路方向に流れる電流が最大となる。図7(b)は$\lambda/4$の長さの同軸線路の一端を開放し、他端を短絡して構成した$\lambda/4$同軸共振器の共振電磁界を示す。開放端ではE_rが最大となり、短絡端ではH_θが最大となる。

時間的に見るとどちらの場合も振動の周期に連動して、電界最大→磁界最大→電界最大→. . . を繰り返す。すなわち、ある瞬間、共振器内に電界エネルギーが蓄えられると、それから時間的に位相が90度進んだ後に、全てが磁界エネルギーに変換され、さらに位相が90度進むと、再び電界エネルギーに変換される。力学的振り子における、位置エネルギーと運動エネルギーの関係と同様、電界エネルギ⇔磁界エネルギーの変換の連続が「ある特定の波長をもつ電磁界エネルギーを蓄える」という共振のメカニズムを支えている。

2-3　マイクロストリップ線路

図８に、マイクロストリップ線路の構造とその基本モードの電磁界分布を示す。裏面を接地導体で覆った誘電体基板の上面に、線路導体を配して構成される。マイクロストリップ線路も、図５上に示した平行板線路からの変形として考えることができる。平行板線路の上側の導体板の幅を狭くして線路状にしたものが図８の構造と考えると、その伝送モードもTEMモードに似ているものと類推できる。実際には、誘電体基板の誘電率が空気のものより大きい事等のために、電磁界の伝送方向成分が僅かに発生し、純粋なTEMモードにはならない。しかし、特に電界が集中する線路導体下部の誘電体基板内の領域では、その影響は通常無視し得るほど小さく、その伝送特性を考える際には、実用上、断面方向の電磁界成分E_tおよびH_tのみを考慮すれば、

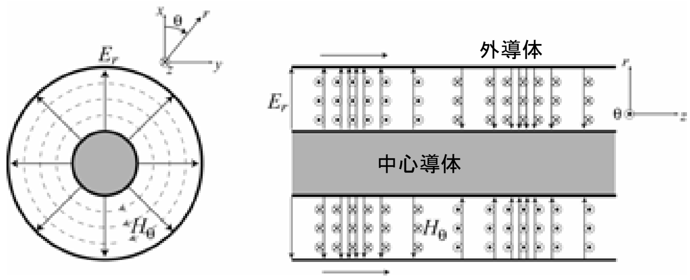


図６　同軸線路の基本モードの電磁界

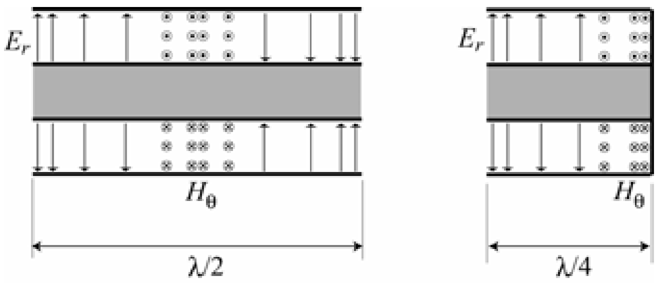


図７　同軸線路共振器

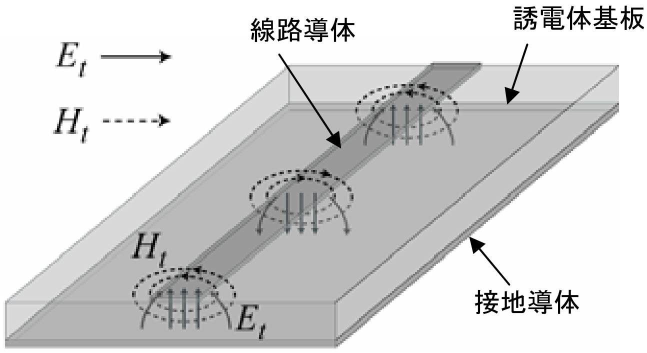


図８　マイクロストリップ線路の基本モード

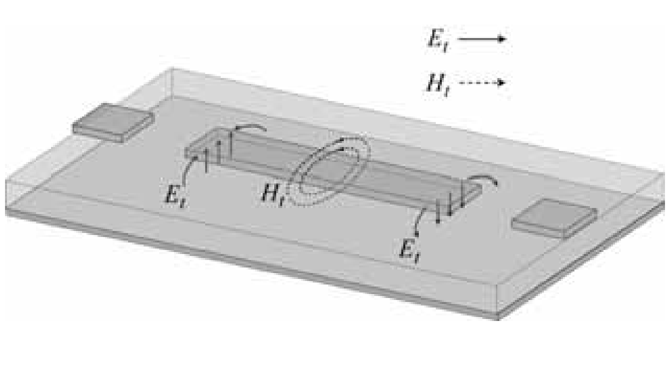


図9　マイクロストリップ線路λ/2共振器

よい。この様なモードを準 TEM モードと呼ぶ。
図 9 は、マイクロストリップ線路で構成した、両端開放$\lambda/2$共振器の構造と電磁界分布を示す。同軸共振器の場合と同様、ある瞬間に開放端でE_tの瞬時値が最大となると、それから時間的に位相が 90 度進んだとき、両端から空間的に 90 度離れた中央部でH_tの瞬時値が最大となる。

2-4　コプレーナ線路

図 10 にコプレーナ線路の構造および基本モードの電磁界分布を示す。線路導体と接地導体が同一平面上に存在するという構造的な特徴を有する。このコプレーナ線路の基本伝送モードも準 TEM である。
図 11 は、コプレーナ線路で構成した、両端開放$\lambda/2$ 共振器の構造と電磁界分布を示す。マイクロストリップ線路共振器と同様、開放端でE_tが最大となり中央部でH_tが最大となる。

2-5　導波管

図 12 は、方形導波管の構造と基本伝送モードの電磁界分布を示す。この線路は、図 5 上に示した平行板線路の両脇に側壁導体を設けた構造である。導体板上では電界の接線成分が零になるので、図 12(a)に示す様に、断面内の電界分布は一様でなくなり、TEMモードとしては存在できない。全ての伝送モードは、電界のみが断面方向に振動し、伝送方向の磁界成分を持つTE（Transverse Electric）モードと、磁界のみが断面方向に振動し、伝送方向の電界成分を持つ TM（Transverse Magnetic）モードに分類される。図 12 に示した基本モードはTE_{10}モードである。図のように進行波を形成する場合、やはり電界と磁界は同相で、時間と共にz方向に伝搬していく。
図 13 に、方形空洞共振器の構造と共振電磁界分布を示す。図 12 の導波管の両端を金属壁で終端した構造であり、導波管で構成した両端短絡$\lambda/2$ 共振器と呼ぶこともできる。この場合も電界・磁界は時間的・空間的に 90 度の位相差をもつ。

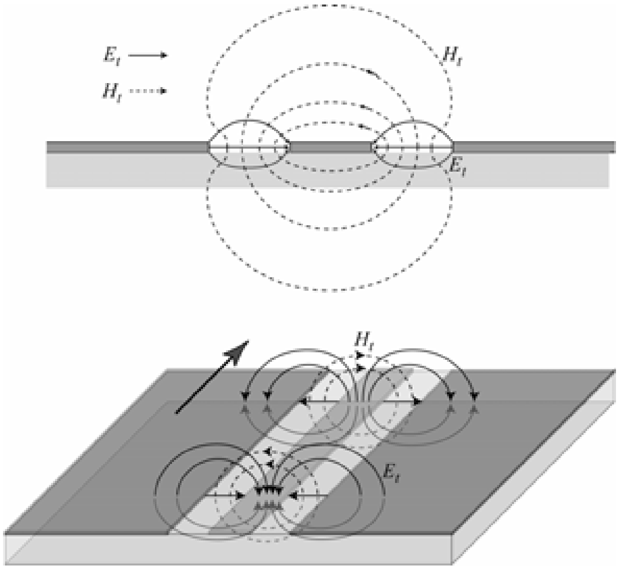


図 10　コプレーナ線路の基本モード

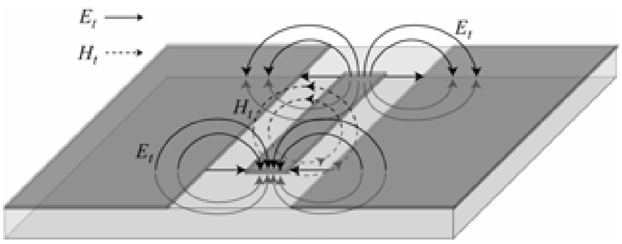
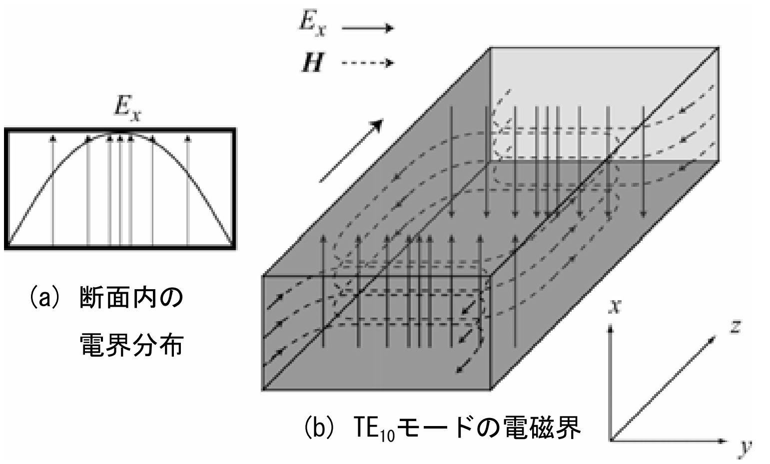


図 11　コプレーナ線路$\lambda/2$ 共振器



(a) 断面内の電界分布

(b) TE_{10}モードの電磁界

図 12　方形導波管の基本モード（TE_{10}モード）

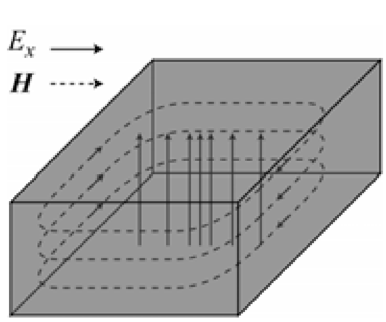


図 13　TE_{101}モード方形空洞共振器

3. マイクロ波伝搬を理解するための基礎事項

3-1 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は、「磁界が時間的に変化すると、それを妨げる様に周りに電界が生じる」というファラデーの誘導起電力の法則と、「電流の存在や電界の時間的変化により、その周りに磁界が発生する」というアンペール・マクスウェルの法則を、それぞれ数学的に記述したものであり、例えば前章で示した各種伝送線路内の電磁界を計算する際の基本になる。

均質等方性の媒質中を、正弦的に振動して伝搬する電磁界に対するマクスウェル方程式は、

$$\nabla\times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H} \qquad (1)$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \qquad (2)$$

と書ける。両式の左辺にある∇×はベクトルに対する微分演算の一種で「回転」と呼ばれる。右辺の $j\omega$ は、時間微分 $\partial/\partial t$ の結果生ずる係数である。式(2)右辺の第 1 項の $\boldsymbol{J}$ は電流密度である。

ここでは、もっとも簡単な例として平面波伝搬を取り上げ、マクスウェルの方程式を用いて考察する。$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\,E_x$、$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}\,H_y$、$\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ であることに注意すると、式(1)は、

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \qquad (3)$$

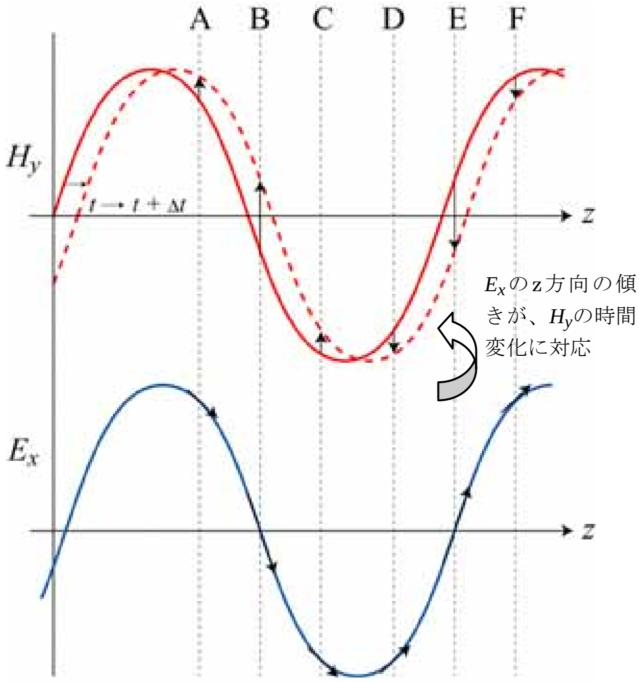
となる。すなわち、磁界H_yが時間的に変化すると、その増加分／減少分に比例して、電界E_xはz方向とともに減少／増加する。これを満足する一例として 2-1 節の前半で述べた進行波の場合を図 14 に示す。初期条件として、E_x とH_yは同相であるとする。今、時刻tにおいて、図 14(a)上の実線で示されるようなH_yの空間分布があったとする。これが、時刻$t + \Delta t$において、破線のように+z方向に進むとき、位置A、B、CにおいてはH_yは増加し、位置D、E、Fにおいては減少する。式(3)によれば、そのH_yの増加／減少分が、E_xの空間分布における+z方向の減少／増加分に相当するので、E_xは同図下の実線の様になる。言い換えると、図 14(a)下の実線で示される様にE_xが分布するとき、式(3)を満足する様にH_yがz方向に伝搬する。

式(2)についても J = 0 とおけば、上と同様に、次式となる。

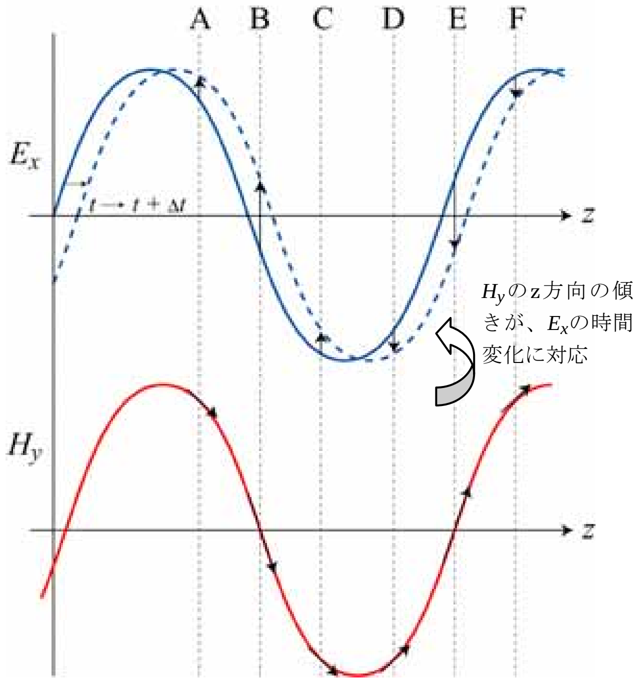
$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -j\omega\varepsilon E_x \qquad (4)$$

E_x とH_yが同相という初期条件下で、これを満足するのは、図 14(b)の状態、すなわち、H_yがz方向に周期的に変化する分布をもち、同時にE_xがz方向に伝搬する場合である。

従って、電界の空間分布の変化により磁界が進み、同時に磁界の空間分布の変化により電界が進む、というのが進行波伝搬のメカニズムであると理解できる。



(a) H_yの時間変化とE_xの空間分布



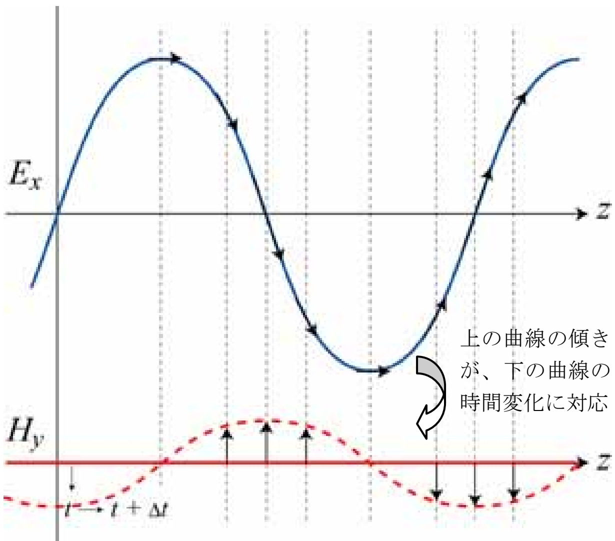
(b) E_xの時間変化とH_yの空間分布

図 14 平面進行波の場合

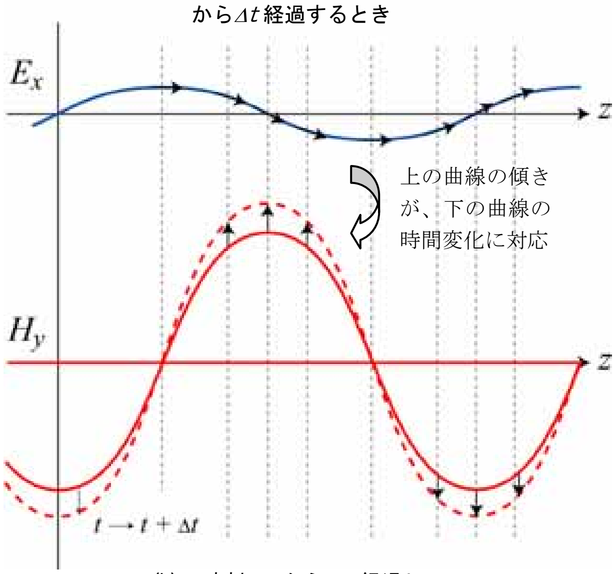
次に、2-1 節の後半で述べた全反射に伴う定在波の場合を考える。この場合は、電界最大のときに磁界が零という初期条件から出発する。図 15(a)の上の実線で示す様に、時刻tにおいてE_xの振幅が最大となり、同時に磁界H_yは図 15(a)

下の実線で示す様に振幅零であるとする。式(3)に従えば、時刻$t + \Delta t$において、E_xの振幅が破線のように減少に転じると、E_xのz方向に関する変化分に応じて、零であったH_yの振幅が破線で示す様に増加する。このときE_xの最大位置では、傾きが零であるので、H_yは零のままであり、E_xとH_yの空間的位相は 90 度ずれる。H_yの振幅の増加は、図 15(b)に示す様に、E_xの振幅が零になるまで続き、その時点でH_yは最大を迎える。つまり、E_xとH_yの時間的位相も 90 度ずれる。この様に、マクスウェルの方程式に従えば、全反射に伴う定在波の場合、電磁界の時間的・空間的位相差が 90 度になることがわかる。

以上の様に、進行波の場合も定在波の場合もマクスウェルの方程式を満足するが、その電磁界の振る舞いの違いは、初期条件の違いにより生じるものと理解することができる。



(a)　電界が最大となる時刻 t からΔt経過するとき



(b)　時刻 t　からΔt 経過し磁界が最大となるとき

図 15　平面定在波の場合

3-2　波動方程式

式(1)および式(2)を用いると、以下のように電界に関する方程式および磁界に関する方程式を導出することができる。

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + k^2 \boldsymbol{H} = 0 \tag{6}$$

ただし、

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{7}$$

これらは波動方程式と呼ばれ、それぞれを解くことによって、電界および磁界の様子を知ることができる。2−1 節で述べた平面波の場合は、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i}\, E_x$、$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}\, H_y$、$\partial / \partial x = \partial / \partial y = 0$ なので、式(5)および式(6)は、

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = 0 \tag{9}$$

となる。上式を満足する正弦振動の解として、

$$E_x = E_i\, e^{j(\omega t - kz)} + E_r\, e^{j(\omega t + kz)} \tag{10}$$

$$H_y = H_i\, e^{j(\omega t - kz)} + H_r\, e^{j(\omega t + kz)} \tag{11}$$

を得る。共に右辺第 1 項は+z方向に進む前進波に相当し、第 2 項は-z方向に進む後進波に相当する。E_i、H_iは前進波の振幅、E_r、H_rは後進波の振幅である。

従って、+Z方向への進行波の界表示式は、式(10)および(11)においてE_r、H_rを零とおいて得られるが、同時に式(3)あるいは式(4)を満足する必要があるので、結局次式となる。

$$E_x = E_i\, e^{j(\omega t - kz)} \tag{12}$$

$$H_y = H_i\, e^{j(\omega t - kz)} = \frac{k}{\omega\mu} E_i\, e^{j(\omega t - kz)} \tag{13}$$

一方、全反射に伴う定在波の界は、式(10)および(11)を、$E_i = E_r$、$H_i = H_r$とおいて変形し、やはり式(3)を用いて得た次式

$$E_x = 2E_i\, e^{j\omega t} \cos kz \tag{14}$$

$$H_y = 2H_i\, e^{j\omega t} \cos kz = -j\frac{k}{\omega\mu} 2E_i\, e^{j\omega t} \sin kz \tag{15}$$

で表すことができる。$-j = e^{-j\pi/2}$ であるので、H_yはE_xより時間的位相が 90 度遅れることを示し、cosとsinの違いにより空間的位相差も 90 度であることを表している。

4.　回路論的取り扱い

4-1　分布定数線路モデル

前章まで述べた様に、伝送線路内の電磁界の振る舞いは、進行波の場合と定在波の場合とで異なる。進行波の場合、伝送路上の電磁界の瞬時値は位置ごとに異なるが、時間平均をとった実効値で比較すれば､線路に沿って一様となる。しかし、実際の回路では、伝送線路上を純粋な進行波が伝搬するのはごく稀であり、一般には少なからず定在波がたっている場合が多い。このような場合、電界および磁界の実効値は線路内の位置ごとに異なる。特にマイクロ波領域では、波長と回路寸法とが、ほぼ同じオーダーであるので、回路内の電磁界の変化が目まぐるしい。マイクロ波回路を回路論的に取り扱う際には「回路内の位置」を考慮する必要があり、この理由から以下に示す分布定数線路モデルがよく用いられる。

図 16(a)に分布定数線路を示す。今、線路上の任意の点から微小区間 dz の部分を、図 16(b)の様に考え、以下の回路方程式をたてる。

$$-\frac{dV}{dz} = \left(R + j\omega L\right) I \tag{16}$$

$$-\frac{dI}{dz} = \left(G + j\omega C\right) V \tag{17}$$

式(16)、(17)より、以下の 2 つの方程式が導出される。

$$\frac{d^2V}{\partial z^2} - \gamma^2 V = 0 \tag{18}$$

$$\frac{d^2I}{\partial z^2} - \gamma^2 I = 0 \tag{19}$$

ただし、

$$\gamma^2 = \left(R + j\omega L\right)\left(G + j\omega C\right) \tag{20}$$

γ は伝搬定数と呼ばれ、線路が無損失（$R = 0$、$G = 0$）のとき、

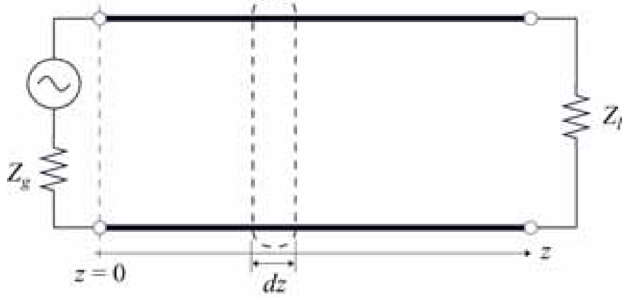
$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \tag{21}$$

となる。式(18)および式(19)の解は、次式

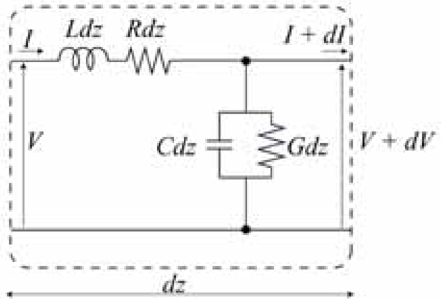
$$V = V_i\, e^{-\gamma z} + V_r\, e^{\gamma z} \tag{22}$$

$$I = I_i\, e^{-\gamma z} + I_r\, e^{\gamma z} \tag{23}$$

で与えられる。両式の右辺第 1 項は+z 方向に進む前進波に対応し、第 2 項は-z 方向に進む後進波を表す。これらは、式(10)、(11)において、時間因子$e^{j\omega t}$を省き､電界を電圧に､磁界を電流に､γ をk に置き換えたものに等しい。特にTEM線路の場合は、電界と電圧、磁界と電流の置き換えが一義的に行え、分布定数線路モデ



(a)　分布定数線路



(b)　微小区間 dz の等価回路

図 16　分布定数線路の考え方

ルによる回路的取り扱いは有効な手段となっている。

式（22）を式(16)に代入すると、

$$I = \frac{\gamma}{R + j\omega L} V_i\, e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{R + j\omega L}\, V_r\, e^{\gamma z} \tag{24}$$

を得るが、これを式(23)と比較すると、

$$I_i = \frac{\gamma}{R + j\omega L} V_i \quad , \qquad I_r = -\frac{\gamma}{R + j\omega L} V_r \tag{25}$$

の関係を得る。このことから、線路の特性インピーダンスZ_cを

$$Z_c = \frac{\gamma}{R + j\omega L} = \sqrt{\frac{G + j\omega C}{R + j\omega L}} \tag{26}$$

と定義する。線路が無損失のときは、

$$Z_c = \sqrt{\frac{C}{L}} \tag{27}$$

となる。

特性インピーダンスは、線路構造によって定まり位置zに依らない定数である。一方、マイクロ波伝送線路上の、電界および磁界と同様に分布定数線路上のVおよびIは位置zにより変化する。従って、図 17 に示す様に各位置から負荷側をみたインピーダンスZ_pも z の関数となる。

式(22)、(23)で与えられるV、Iより、Z_pは次式で与えられる。

$$Z_p = \frac{V}{I} = \frac{V_i e^{-\gamma z} + V_r e^{\gamma z}}{I_i e^{-\gamma z} + I_r e^{\gamma z}} = Z_c \frac{V_i e^{-\gamma z} + V_r e^{\gamma z}}{V_i e^{-\gamma z} - V_r e^{\gamma z}} \qquad (28)$$

ただし、式(25)、(26)の関係を用いた。
ここで、前進波と後進波の比として、次式

$$\Gamma = \frac{V_r e^{\gamma z}}{V_i e^{-\gamma z}} \qquad (29)$$

の様に反射係数Γを定義し、式(28)を書き換えると、

$$Z_p = Z_c \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \qquad (30)$$

の関係を得る。
式(29)が示す様に、Γもまたzの関数であるから線路に沿って変化する。図 18 に示す様に、距離lだけ離れた点Aおよび点Bにおける反射係数をΓ_A、Γ_Bとおくと、

$$\Gamma_A = \frac{V_r e^{\gamma z}}{V_i e^{-\gamma z}}\ ,\quad \Gamma_B = \frac{V_r e^{\gamma(z+l)}}{V_i e^{-\gamma(z+l)}}$$

となるから、

$$\Gamma_A = \Gamma_B e^{-2\gamma l} \qquad (31)$$

の関係を得る。すなわち、線路に沿って電源側にlだけ戻ると、反射係数は $e^{-2\gamma l}$倍になる。
以上を用いて、図 19 に示す様に負荷Z_lで終端した分布定数線路を考え、終端位置からlだけ離れた点Aから見た反射係数および負荷側をみたインピーダンスを考える。Z_lの手前における反射係数Γ_Bは、式(30) においてZ_pをZ_lに置き換えて得た次式、

$$\Gamma_B = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} \qquad (32)$$

により与えられる。これを式(31)に代入すれば、

$$\Gamma_A = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c} e^{-2\gamma l} \qquad (33)$$

さらにこれを、式(30)のΓとして用いれば点 A から負荷側をみたインピーダンスが以下の様に

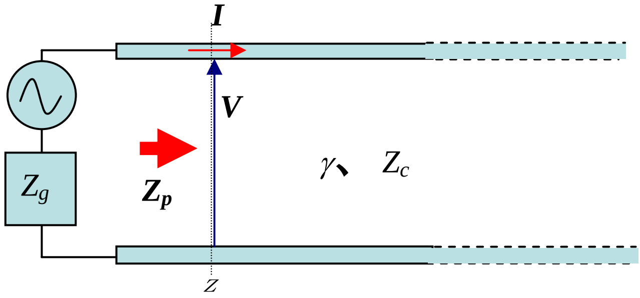


図 17　位置 z における駆動点インピーダンス

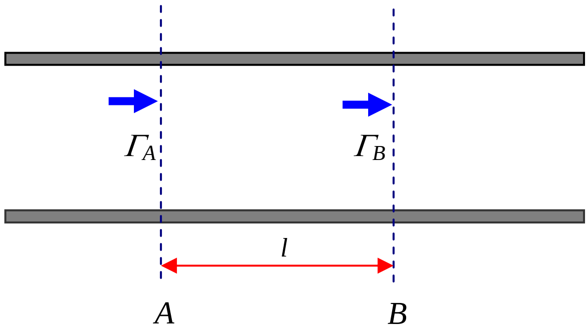


図 18　距離 l 離れた 2 点における反射係数

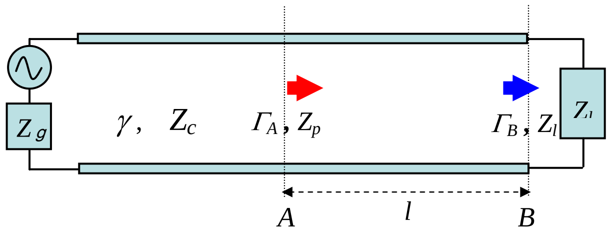


図 19　負荷Z_lを接続した終端点から l だけはなれた点の反射係数と駆動点インピーダンス

求まる。

$$Z_p = Z_c \frac{Z_l + Z_c \tanh\gamma l}{Z_c + Z_l \tanh\gamma l} \qquad (34)$$

lを変化させたときのΓ_BとZ_pを、式(33)と式(34)を用いて計算した結果を図 20 に示す。
実際のマイクロ波回路の特性を評価するとき、反射係数や入力インピーダンスを測定する場合は多い。ここに分布定数線路モデルを導入して示した様に、これらの測定値は観測点位置の僅かなずれにより大きく変わることがあることに注意する必要がある。
式(30)で示した、インピーダンスと反射係数の関係を用いると、図 21 に示す様に、極座標系上に表示した反射係数の投影点により、インピーダンスを直読できるスミスチャートへの座標変換が可能である。従来は、反射係数の測定値

をスミスチャート上に記入し、図式的にインピーダンスを直読するのに用いられていたが、現在でもマイクロ波回路の測定器として良く用いられるベクトルネットワークアナライザには、このスミスチャートの表示機能が備えられている。

4-2　分布定数線路モデルによる共振器の表現

次に、2-2 節から 2-5 節に示したマイクロ波共振器の分布定数線路モデルによる等価回路を考える。両端を短絡した$\lambda/2$ 共振器の等価回路を図 22(a)に、両端を開放した$\lambda/2$ 共振器を図 22(b)に示す。図 22(a)の回路において、端子 1-1’ から線路側を見たインピーダンスZ_R は次式で与えられる。

$$Z_R = Z_c \tanh \gamma l = Z_c \frac{\tanh \alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \tanh \alpha l \tan \beta l} \qquad (35)$$

ただし、

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad (36)$$

で、αは減衰定数、βは位相定数である。線路が無損失の場合は、$\alpha = 0$ であるから、

$$Z_R = jZ_0 \tan \beta l \qquad (37)$$

となる。端子 1-1’ から左を見たインピーダンスZ_Lは零であるから、共振条件

$$Z_R + Z_L = 0$$

より、次式を得る。

$$jZ_0 \tan \beta l = 0 \qquad (38)$$

共振条件式(38)を満足するのは、

$$\beta l = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

のときであるが、線路内伝搬波長をλ_g とすると、$\beta = 2\pi / \lambda_g$ であるから、

$$l = \frac{\lambda_g}{2} n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (39)$$

となり、線路長が共振時伝搬波長の 1/2 の整数倍となるとき共振することが確認できる。1/2 波長共振器として動作するのは、$n = 1$ の場合である。

次に、分布定数線路共振器の無負荷Q、Q_uを考えるために、線路にわずかに損失がある場合を考える。このとき、$\alpha l \ll 1$ とできるとすると共振時の Z_R は、

$$Z_R(\omega_0) = Z_c \tanh \alpha l \approx Z_c \alpha l \qquad (40)$$

となる。$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ のときのZ_R は、α が ω_0 の近傍でほぼ一定であるので、

$$Z_R(\omega_0 + \Delta\omega) \approx Z_c \tanh\{\alpha l + j(\beta + \Delta\beta)l\}$$

$$= Z_c \tanh\left\{\alpha l + j\left(\pi + l\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\Delta\omega\right)\right\}$$

$$= Z_c \frac{\tanh \alpha l + j \tan\left(\pi + l\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\Delta\omega\right)}{1 + j \tanh \alpha l \tan\left(\pi + l\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\Delta\omega\right)}$$

$$\approx Z_c \frac{\alpha l + jl\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\Delta\omega}{1 + j\alpha\frac{\partial \beta}{\partial \omega}\Delta\omega l^2}$$

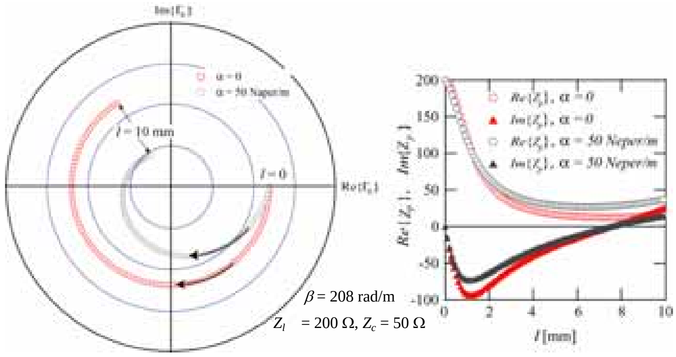


図 20　位置の変化に伴う反射係数および駆動点インピーダンスの変化

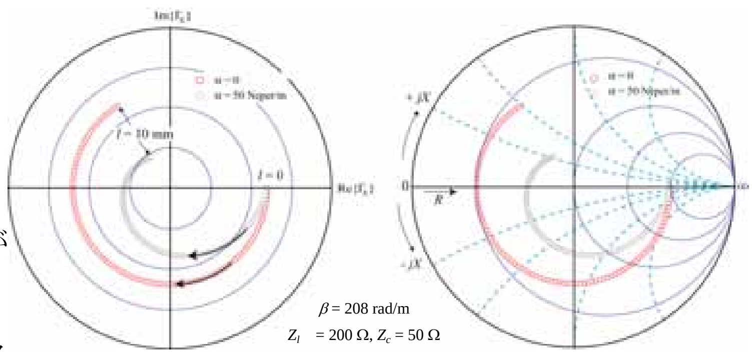
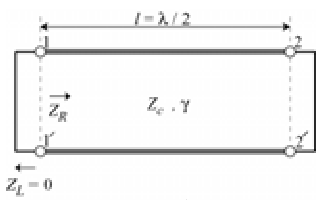
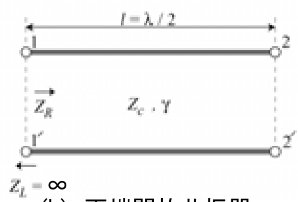


図 21　スミスチャート



(a) 両端短絡共振器



(b) 両端開放共振器

図 22　分布定数線路モデルによる $\lambda/2$ 共振器の等価回路

$$\approx Z_c \alpha l\left(1 + j\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\frac{\Delta\omega}{\alpha}\right) \qquad (41)$$

ただしここで、$\alpha\dfrac{\partial\beta}{\partial\omega}\Delta\omega l^2 << 1$とした。

一方､図 23 に示される LCR 共振回路の回路インピーダンスは次式で与えられる。

$$Z = R\left\{1 + jQ_u\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right\} \qquad (42)$$

ただし、Q_uは次式で定義される。

$$Q_u = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \qquad (43)$$

式(39)と(40)を比較して得られる次の関係、

$$R = Z_0 \alpha l$$

$$Q_u\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx Q_u\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\frac{\Delta\omega}{\alpha}$$

を用いると、次式を得る。

$$Q_u = \frac{\omega_0}{2\alpha}\frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{\beta}{2\alpha}\frac{\omega_0}{\beta}\frac{1}{\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}} = \frac{\beta}{2\alpha}\frac{v_p}{v_g} \qquad (44)$$

を得る。ただし、v_p は位相速度、v_g は群速度であり、各々次式で定義される。

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \qquad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \qquad (45)$$

特に、TEMモードの場合には、$v_p = v_g$ なので、$Q_u = \beta / 2\alpha$ となる。ただし、以上の考察においては両端の短絡板の導体損失は無視している。

図 22(b)の両端開放λ/2 共振器についても、同様に考えることができ、共振波長を与える式として式(39)が､Q_uを与える式として式(44)が導出される。

さらに、一端を短絡し、もう一端を開放したλ/4 共振器の等価回路を図 24 に示す。この場合の共振条件式は、

$$j\frac{1}{Z_c}\cot\beta l = \frac{1}{Z_L} \qquad (46)$$

となる。$Z_L = \infty$ であるので、$\cot\beta l = 0$、すなわち、

$$\beta l = \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

のとき、共振条件を満足する。この場合、

$$l = \frac{\lambda_g}{4}(2n-1) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (47)$$

となり、共振時に線路長が伝搬波長の 1/4 の奇数倍となることが確認できる。1/4 波長共振器として動作するのは、n = 1 の場合である。1/4 波長共振器のQ_uは、1/2 波長共振器の場合と同様に求められ、式(44)で与えられる。

以上の様に、1/2 波長共振器や 1/4 波長共振器の場合、元の線路の減衰定数および位相定数などがわかれば分布定数線路モデルの等価回路により無負荷 Q を計算できる。

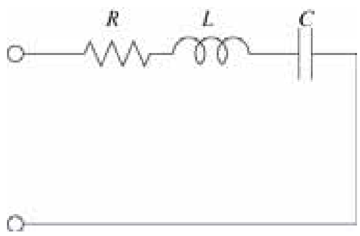


図 23　LCR 直列共振回路

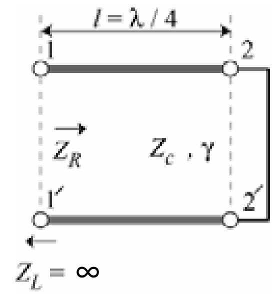


図 24　分布定数線路モデルによるλ/4 共振器の等価回路

5.　まとめ

マイクロ波回路の基本的な考え方を理解するために、いくつかのマイクロ波伝送線路および共振器を取り上げ、内部での電磁界の伝搬の様子をイメージし、そのメカニズムについて解説した。さらにそれらの線路や共振器が、分布定数線路モデルによる等価回路で表示できることを示した。

参考文献

[1] 中島将光, “マイクロ波工学 基礎と原理”, 森北出版, 1975.
[2] 岡田文明, “マイクロ波工学 基礎と応用”, 山海堂, 2004.
[3] 早川正士, “波動工学”, コロナ社, 1992.
[4] 藤澤和男, “改版マイクロ波回路”, コロナ社, 1972.
[5] 川上彰二郎, 松村和仁, 椎名徹, “光波電波工学”, コロナ社
[6] Roger F. Harrington, ″Time-Harmonic Electromagnetic Fields,″ McGraw-Hill, 1961.