

発振回路における歪と雑音

Perturbation Theory for Noise and Harmonics in Oscillators

大平 孝

Takashi OHIRA

ATR 適応コミュニケーション研究所

ATR Adaptive Communications Research Laboratories

619-0288 京都府けいはんな学研都市光台 2-2-2

2-2-2 Hikaridai, Keihanna Science City, Kyoto 619-0288 Japan

あらまし 能動デバイス、LC 直列共振器、負荷抵抗からなる最も単純な発振系における非線形効果および雑音の振舞を摂動法により説明する。キャパシタに非線形性がある場合にその第1次項により発振周波数の2倍の調波が発生することを示す。デバイスが発生する雑音のうち発振周波数近傍の成分が離調周波数の2乗に反比例した電力密度を持つ側波帯雑音として負荷に出力されることも導出する。

1. まえがき

コンピュータの演算能力向上により高周波回路の設計が機械的にできるようになった。例えば増幅器やミキサなどの線形／非線形アナログ回路の解析とパラメータ最適化が数値处理的に可能である。発振器についても発振周波数や出力レベルを数値解析することが可能となってきた。しかしながら、発振過程における高調波歪や位相雑音を予測するにはシミュレータにプログラムする前にこれらの発生メカニズムをよく理解しておくことが肝要である。本稿では、発振スペクトルに対する基本的な理解を得るため、単純な等価回路モデルに摂動法を適用することにより歪と雑音の発生レベルを軽妙かつ明朗に定式化する。

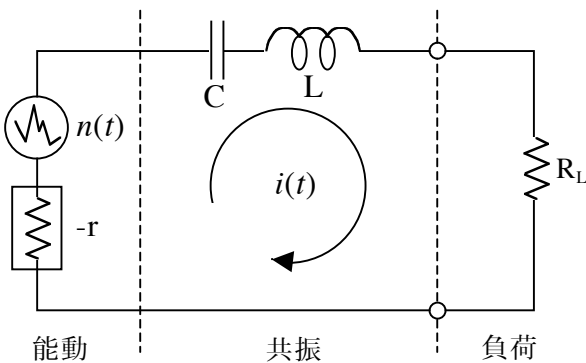


図1 最も単純な発振回路

2. 基本方程式

2.1 等価回路モデル

発振回路は能動デバイスと共振器と負荷から構成される。発振現象と出力スペクトルを説明

するために最小限必要な要素からなる等価回路を図1に示す。この系における回路定数として

$-r$: 能動デバイスによる負性抵抗

C : 直列共振のキャパシタ

L : 直列共振のインダクタ

R_L : 負荷抵抗 (通常は50Ω)

および時刻 t の関数として

$n(t)$: 能動デバイスによる雑音電圧

を与えたときに発生する

$i(t)$: 回路電流

$v(t)$: キャパシタ電圧

を求める問題を考える。

図1の等価回路におけるキルヒホッフの法則

$$i = C \frac{dv}{dt}, v + L \frac{di}{dt} + (R_L - r)i = n \quad (2.1.1)$$

から出発する。もし $r < R_L$ ならば解は減衰振動となり発振は開始しない。発振が開始するための条件は $r > R_L$ であり、その後振幅が成長するにつれ能動デバイスの利得の低下により $r \rightarrow R_L$ となり、定常状態では $r = R_L$ に均衡収束する。

定常状態において、上式から i を消去すると v についての線形常微分方程式

$$v + LC \frac{d^2v}{dt^2} = n \quad (2.1.2)$$

を得る。これは非同次方程式であるので一般解は容易には得られない。そこで、右辺を零とお

いた同次方程式

$$v + LC \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \quad (2.1.3)$$

を考える。もし、方程式(2.1.2)の特殊解がひとつ見つければ、それに方程式(2.1.3)の一般解を加えたものが方程式(2.1.2)の一般解となる。

2.2 基本波出力電力

式(2.1.3)は雑音源がない場合の回路方程式であり、その一般解は

$$v(t) = v(0)e^{j\omega t}, \quad \omega = 1/\sqrt{LC} \quad (2.2.1)$$

である。\$v(0)\$はキャパシタ電圧の定常振幅（位相因子を含めた複素振幅表示）である。この解を式(2.1.1)に代入すると定常回路電流

$$i = C \frac{d}{dt} \left\{ v(0)e^{j\omega t} \right\} = j\omega C v(0)e^{j\omega t} \quad (2.2.2)$$

が求まる。負荷 \$R_L\$ へ出力される発振電力は

$$P_0 = \frac{1}{2} R_L |i|^2 = \frac{1}{2} \omega^2 C^2 R_L |v(0)|^2 \quad (2.2.3)$$

と表される。

3. 高調波歪

3.1 非線形容量

FET のゲート・ソース間容量や発振周波数制御用バラクタダイオードの容量はその両端にかかる直流バイアス電圧のみならず RF 電圧に依存して変化する。すなわち電圧電流特性が非線形となる。ここでは、図 1 に示す等価回路においてキャパシタ \$C\$ の非線形性により発生する高調波歪を摂動法により求める。簡単のため \$C\$ 以外の非線形性による効果は省略する。

半導体の接合容量は電圧 \$v\$ の関数として

$$C = C_0 \left(1 - \frac{v}{\phi_d} \right)^{-\gamma}$$

で与えられる。\$\phi_d\$ は拡散電位、\$\gamma\$ は接合面不純物分布で決まる定数である。これを幕級数

$$C = C_0 + \delta C_1 v + \delta^2 C_2 v^2 + \delta^3 C_3 v^3 + \dots \quad (3.1.1)$$

$$C_k = \frac{C_0}{k! \phi_d^k} \prod_{\xi=0}^{k-1} (\gamma + \xi)$$

に展開する。\$\delta\$ はその項が小さい物理量であることを示すための摂動記号である[1]。\$C_0\$ は線形容量、\$C_1\$ 以降は非線形容量と呼ばれる。1 次の非線形容量が発振に与える影響を簡単に調べるため、2 次以上の非線形性を無視して容量モデルを考える。次に、RF 電圧も同様に非摂動項と摂動項の和として

$$v = v_0 + \delta v_1 \quad (3.1.2)$$

と表す。ここでも容量モデルと同様に 2 次以上の非線形性を無視している。式(3.1.1)と式(3.1.2)を雑音源がない場合の回路方程式(2.1.3)に代入して得た式を \$\delta\$ の多項式として整理すると、その第零次項ならびに第一次項から

$$v_0 + LC_0 \frac{d^2 v_0}{dt^2} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$v_1 + LC_0 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + LC_1 v_0 \frac{d^2 v_0}{dt^2} + LC_1 \left(\frac{dv_0}{dt} \right)^2 = 0 \quad (3.1.4)$$

が得られる。これらはそれぞれ非摂動方程式、摂動方程式と呼ばれる。

3.2 歪出力電力

非摂動方程式(3.1.3)の一般解は

$$v_0(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \vartheta), \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC_0} \quad (3.2.1)$$

である。これを摂動方程式(3.1.4)に代入すると \$v_1(t)\$ についての非同次方程式

$$v_1 + LC_0 \frac{d^2 v_1}{dt^2} = \omega_0^2 LC_1 a_0^2 \cos(2\omega_0 t + 2\vartheta) \quad (3.2.2)$$

を得る。この方程式のひとつの特殊解として

$$v_1(t) = -\frac{C_1}{3C_0} a_0^2 \cos(2\omega_0 t + 2\vartheta) \quad (3.2.3)$$

が容易に見出される。

式(3.1.2)式(3.2.1)式(3.2.3)を式(2.1.1)に代入することにより回路電流

$$i = -\omega_0 C a_0 \sin(\omega_0 t + \vartheta) + \delta \omega_0 C \frac{2C_1}{3C_0} a_0^2 \sin(2\omega_0 t + 2\vartheta) \quad (3.2.4)$$

が得られる。括弧内の第1項は基本波電流、第2項は第2次高調波電流である。これらの電力比は

$$\left| \frac{i_{2\omega_0}}{i_{\omega_0}} \right|^2 = \frac{4C_1^2}{9C_0^2} a_0^2 \quad (3.2.5)$$

となる。δ記号は省いてある。これを式(2.2.3)で導出した基本波出力電力 P_0 を用いて表現すると第2高調波出力レベル

$$HD_2 = 10 \log_{10} \left(\frac{8LC_1^2}{9C_0^3 R_L} P_0 \right) \quad [\text{dBc}] \quad (3.2.6)$$

が導出できる。

4. 位相雑音

4.1 ふたつの時間目盛

発振は電圧の位相が高速に回転している現象であり、位相雑音はそれに比べて低速の現象である。これらを同時に時間軸に沿って解析を行うために2つの時間目盛を用意する。すなわち、発振周波数（高周波）の速さの時間目盛

$$t_0 = t \quad (4.1.1)$$

と、発振位相のゆらぎ（低周波）を追いかけるためのゆっくりした時間目盛

$$t_1 = \delta t \quad (4.1.2)$$

を導入する。 t は通常的时间目盛、 δ はその項が小さい物理量であることを示すための摂動記号である。この節では全ての物理量を2つの時間目盛(t_0, t_1)を横軸にして観測する。すなわち電圧は2変数関数

$$v(t) = v(t_0, t_1) \quad (4.1.3)$$

とみなす。電圧の全微分は t_0 軸方向への偏微分と t_1 軸方向への偏微分の和

$$dv(t) = dv(t_0, t_1) = \frac{\partial v}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial v}{\partial t_1} dt_1 \quad (4.1.4)$$

で表される。同様に、1階および2階の時間微分演算子は連鎖定理によりそれぞれ

$$\frac{d}{dt} = \frac{dt_0}{dt} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{dt_1}{dt} \frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \delta \frac{\partial}{\partial t_1} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + \delta \frac{\partial}{\partial t_1} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} \quad (4.1.6)$$

となる。δの2次以上の微小項はここでは無視する。

4.2 変数分離法

図1の回路において雑音源 $n(t)$ に起因して発生するキャパシタ電圧を $v_n(t)$ と書く。 $v_n(t)$ は方程式(2.1.2)の特殊解となる。これを見つけるため、式(4.1.3)で示した電圧を変数分離して

$$v_n(t) = v_n(t_0, t_1) = v_0(t_0) v_1(t_1) \quad (4.2.1)$$

とする。このように分離することは関数形としての一般性を失うが、ここでの目的は方程式(2.1.2)の特殊解を少なくともひとつ見つけることであるので十分である。式(4.1.6)と式(4.2.1)を方程式(2.1.2)に代入すると

$$v_0(t_0) v_1(t_1) + LC \left(\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\delta \frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} \right) \{v_0(t_0) v_1(t_1)\} = \delta n(t_0, t_1) \quad (4.2.2)$$

となる。右辺の摂動記号δは雑音電圧が発振電圧に比べて十分小さいという前提に基づいて付与した。この方程式を項別にδの有無により整理すると、非摂動方程式

$$v_0(t_0) + LC \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} v_0(t_0) = 0 \quad (4.2.3)$$

ならびに摂動方程式

$$2LC \frac{\partial}{\partial t_0} v_0(t_0) \frac{\partial}{\partial t_1} v_1(t_1) = n(t_0, t_1) \quad (4.2.4)$$

に分離される。これらのうち非摂動方程式(4.2.3)は式(2.2.1)と同様に一般解

$$v_0(t_0) = v_0(0) e^{j\omega_0 t_0}, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (4.2.5)$$

を持つ。これを非摂動解と呼ぶ。

4.3 近傍スペクトル

一般に能動デバイスの雑音電圧は連続的かつ広帯域な周波数スペクトルを有している。線形演算系においてはこれを狭帯域成分の和ととらえて重ね合わせの原理が適用できる。ここでは

雑音電圧の発振周波数 ω_0 から $\delta\omega_1$ だけ離調 (offset)した近傍雑音成分

$$\begin{aligned} n(t_0, t_1) &= n(0, 0) e^{j(\omega_0 + \delta\omega_1)t} \\ &= n(0, 0) e^{j\omega_0 t_0 + j\omega_1 t_1} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

に着目する．これと非摂動解を摂動方程式に代入すると

$$\frac{2j}{\omega_0} v_0(0) e^{j\omega_0 t_0} \frac{\partial}{\partial t_1} v_1(t_1) = n(0, 0) e^{j\omega_0 t_0 + j\omega_1 t_1} \quad (4.3.2)$$

となり，特殊解

$$v_1(t_1) = -\frac{\omega_0 n(0, 0)}{2\omega_1 v_0(0)} e^{j\omega_1 t_1} \quad (4.3.3)$$

を得る．式(4.2.5)と式(4.3.3)を式(4.2.1)へ代入すると

$$v_n(t) = -\frac{\omega_0}{2\omega_1} n(0, 0) e^{j\omega_0 t_0} e^{j\omega_1 t_1} \quad (4.3.4)$$

となる．

4.4 雑音出力電力

雑音電流は式(4.3.4)を式(2.1.1)に代入することにより

$$\begin{aligned} i_n &= C \frac{dv_n}{dt} = -\frac{\omega_0}{2\omega_1} C \frac{d}{dt_0} \left\{ n(0, 0) e^{j\omega_0 t_0} e^{j\omega_1 t_1} \right\} \\ &= -j \frac{\omega_0^2}{2\omega_1} C n(0, 0) e^{j\omega_0 t_0} e^{j\omega_1 t_1} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

と得られる．ただし，時間微分演算の摂動項はこの段階に至っては用済であるため無視している．この電流により負荷抵抗 R_L に出力される雑音電力は

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2} R_L |i_n|^2 = \frac{\omega_0^4}{8\omega_1^2} C^2 R_L |n(0, 0)|^2 \\ &= \frac{R_L}{8\omega_1^2 L^2} |n(0, 0)|^2 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

となる．

能動デバイスの雑音源電圧を絶対温度 T [K] の等価雑音抵抗 R_n で表現すると

$$|n(0, 0)|^2 = 2k_B T B R_n \quad (4.4.3)$$

である．ここで k_B はボルツマン定数， B は雑音を観測する帯域幅である．厳密には能動デバイスのみならず負荷抵抗 R_L から熱雑音が発生するがここではその影響を省略する．式(4.4.3)を用いると式(4.4.2)は

$$P_n = \frac{R_L R_n}{4\omega_1^2 L^2} k_B T B \quad (4.4.4)$$

と表される．雑音電力密度は離調周波数の2乗に反比例する．例えば，能動デバイスが白色雑音源であれば位相雑音は -6 dB/oct の周波数傾斜となる．

帯域幅 1 Hz あたりの雑音電力を発振出力電力で正規化した雑音レベルは

$$\frac{P_n}{B P_0} = \frac{R_L R_n}{4\omega_1^2 L^2} \frac{k_B T}{P_0} \quad (4.4.5)$$

となる．ここで定常発振状態での Q ファクタ

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{\sqrt{R_n R_L}} \quad (4.4.6)$$

を定義すると，良く知られた f_1 Hz 離調での雑音密度表現式

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_1) &= \frac{N}{C} \Bigg|_{\text{SSB}} = 10 \log_{10} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f_0}{2f_1 Q} \right)^2 \frac{k_B T}{P_0} \right\} \\ & \quad [\text{dBc} / \text{Hz}] \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

が導出できる．括弧内先頭の因子(1/2)は単側波帯で観測される値であることを意味する．

5. むすび

発振回路における第2次高調波歪と線形位相雑音を摂動法で説明した．キャパシタの第1次非線形項により第2高調波が発生する．デバイス雑音のうち発振周波数近傍の成分が離調周波数の2乗に反比例したスペクトルの側波帯雑音として出力される．本手法を拡張すれば，さらに高次の歪や非線形位相雑音についても同様に導出できるのでぜひ試みられたい．

文献

[1] A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, pp.288-240, New York: Wiley, 1973.